

Оглавление

Введение.....	2
Конструирование поверхностей-посредников	3
Пример конструирования форм поверхностей-посредников (развёрнутый состав действий).	5
Литература	19

Введение

Настоящее пособие составлено с целью помощи студентам, желающим получить углублённые знания по начертательной геометрии, участвующих в олимпиадах. Указания предназначены для формирования у студентов обобщенных подходов к решению ряда частных задач и способствуют развитию пространственного воображения и творческого мышления.

Вопросом, рассматриваемым в данном пособии, является выбор поверхностей-посредников при построении линии пересечения двух поверхностей (общий случай: две пересекающиеся поверхности занимают произвольное положение).

* * *

Выбор поверхностей-посредников для построения линии пересечения двух поверхностей в общем случае является основной частью решения задачи.

Во всех учебниках начертательной геометрии рекомендуется выбирать посредники, которые пересекали бы исходные поверхности по простым линиям. Помощь в выборе посредников предлагается в виде определенных семейств поверхностей, используемых для построения линии пересечения в каждом конкретном случае. Например, в качестве посредников предлагается семейство плоскостей или семейства концентрических или эксцентрических сфер.

На практике студент, перебирая известные поверхности, путём проб и ошибок не всегда приходит к правильному решению.

Но можно подойти более обобщённо к решению этой задачи: не перебирать поверхности, а конструировать посредники самостоятельно.

Ниже предлагается сокращённый и развёрнутый состав действий по решению этой задачи.

Точки линии пересечения получают при пересечении двух выделенных с помощью ряда посредников линий в пересекающихся поверхностях. Но эти две пересекающиеся линии принадлежат одновременно и поверхности-посреднику, являясь геометрическими элементами его формы. Поэтому, можно рассматривать решение этой задачи в следующей последовательности (сокращённый состав действий):

1. Выделить в каждой исходной поверхности семейства простейших линий: прямых или окружностей.
2. Создать из выделенных линий пары теоретически пересекающихся линий.

Оглавление

3. Сформировать разные формы поверхностей-посредников из выделенных пар линий.
4. Выбрать наиболее удобные поверхности для решения задачи.

Ниже приводится развёрнутый состав деятельности по формированию поверхностей-посредников.

Конструирование поверхностей-посредников

Состав действий	Теоретические положения
А. Сконструировать форму поверхности-посредника	<p>Сконструировать форму поверхности – это значит разработать определитель поверхности, т.е. совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно определяют поверхность</p> $\Phi(\Gamma)[A]$ <p>(Γ) – геометрическая часть определителя, [A] – алгоритмическая часть определителя.</p>
I. Разработать геометрическую часть определителя поверхности-посредника	<p>Геометрическая часть определителя (Γ) – совокупность геометрических фигур (точек, линий, поверхностей), участвующих в образовании поверхности.</p>
1. Установить геометрические фигуры, определяющие поверхность-посредник	<p>Каждая поверхность-посредник включает в себя две пересекающиеся линии исходных поверхностей, дающих точку линии пересечения. Частично эти две линии определяют форму поверхности-посредника, являясь геометрическими характеристиками определителя.</p>

а) Установить семейства простейших линий, принадлежащих исходным поверхностям	К простейшим линиям в начертательной геометрии относятся прямые и окружности. Эти линии обычно бывают образующими и направляющими поверхности.
б) Установить все возможные пары теоретически пересекающихся простейших линий исходных поверхностей.	В зависимости от количества простейших линий, составляющих исходные поверхности, получается несколько пар теоретически пересекающихся линий, образующих поверхности-посредники. Например, если в двух исходных поверхностях α и β образующие (g_α и g_β) и направляющие (d_α и d_β) являются простейшими линиями, то получится четыре пары теоретически пересекающихся линий: $g_\alpha \cap g_\beta$; $g_\alpha \cap d_\beta$; $g_\beta \cap d_\alpha$; $d_\alpha \cap d_\beta$.
2. Выбрать одну из пар пересекающихся линий	Пары пересекающихся линий следующие: $g_\alpha \cap g_\beta$; $g_\alpha \cap d_\beta$; $g_\beta \cap d_\alpha$; $d_\alpha \cap d_\beta$.
II. Разработать алгоритмическую часть определителя [A]	В алгебраической части определителя [A] указываются взаимосвязи между геометрическими объектами и законы их перемещения относительно друг друга.
1. Установить функции линий	Линии поверхности могут быть образующими или направляющими.
2. Установить особенности расположения выбранных линий в исходных поверхностях	В пересекающихся поверхностях как образующие, так и направляющие, имеют особенности расположения в соответствии с законом их перемещения. Например, все образующие конической поверхности проходят через одну точку- вершину конической поверхности; образующие цилиндрической поверхности параллельны одному направлению и т.д. эти особенности определяют закон перемещения в выбранной паре теоретически пересекающихся линий.
3. Установить закон перемещения образующих по	Линии между собой могут быть связаны поступательным, вращательным, винтовым

[Оглавление](#)

направляющим	перемещением.
III. Установить формы поверхностей-посредников для всех выделенных пар пересекающихся линий	Поверхность-посредник сформирована, если для каждой выделенной пары пересекающихся линий исходных поверхностей установлены все взаимосвязи.
IV. Выбрать поверхность-посредник для решения данной задачи	Из сформированных поверхностей-посредников выбирается наиболее простая поверхность, приводящая с наименьшими построениям к решению задачи.

Развёрнутый состав действий даёт возможность студенту без пропуска логических звеньев осмыслить все взаимосвязи создания поверхностей-посредников и начать их самостоятельную разработку.

Используя при решении нескольких задач развёрнутый состав действий, он постепенно переходит на сокращённый алгоритм.

Пример конструирования форм поверхностей-посредников (развёрнутый состав действий).

На чертеже представлены (рис.1):
 α - прямой круговой конус: $i_k \perp \pi_1$,
 β - сферическая поверхность.

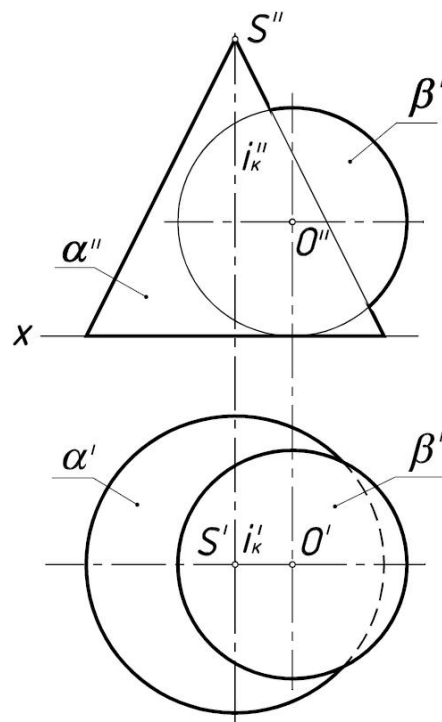


Рис.1

[Оглавление](#)

Решение задачи начинаем согласно выбранному составу действий с организации геометрической части поверхности-посредника (действие I).

1. Устанавливаем геометрические фигуры, определяющие поверхность-посредник.

а) Устанавливаем семейства простейших линий, принадлежащих исходным поверхностям:

- для конической поверхности α :

образующие g_α - прямые и направляющие d_α - окружности (рис.2а).

- для сферической поверхности β :

образующие окружности g_β (меридианы) и направляющие окружности d_β (параллели) (рис.2б).

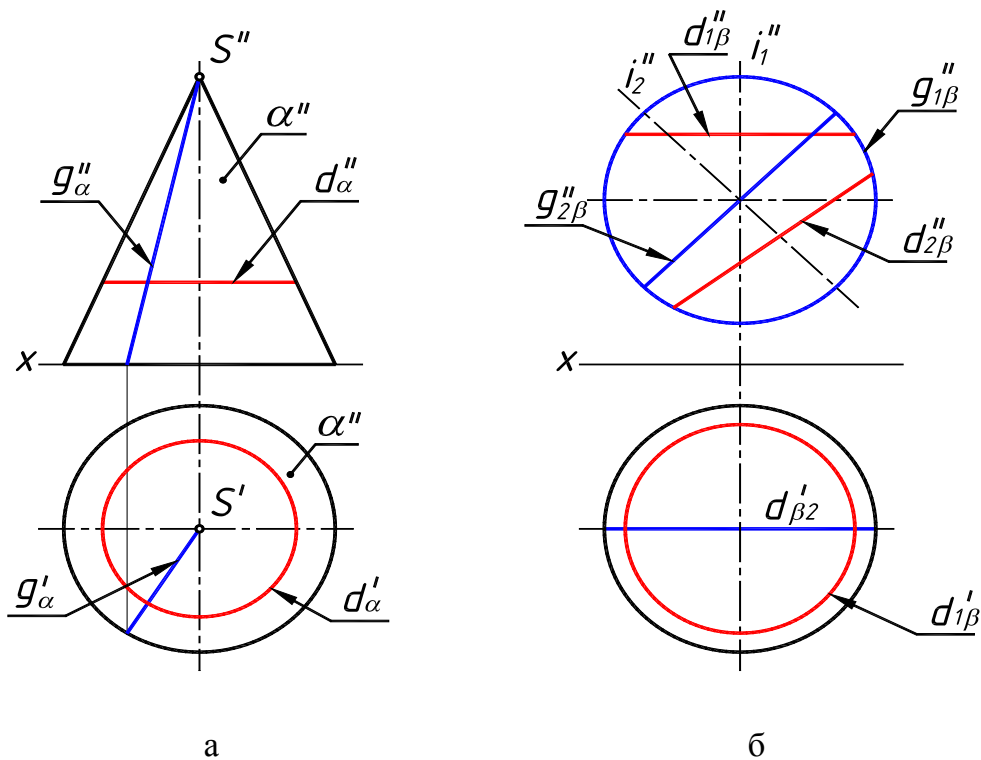


Рис.2

б) Устанавливаем все возможные пары теоретически пересекающихся простейших линий. Таких пар будет четыре: $g_\alpha \cap d_\beta$ (рис.3а); $g_\alpha \cap g_\beta$ (рис.3б); $d_\alpha \cap d_\beta$ (рис.3в); $d_\alpha \cap g_\beta$ (рис.3г).

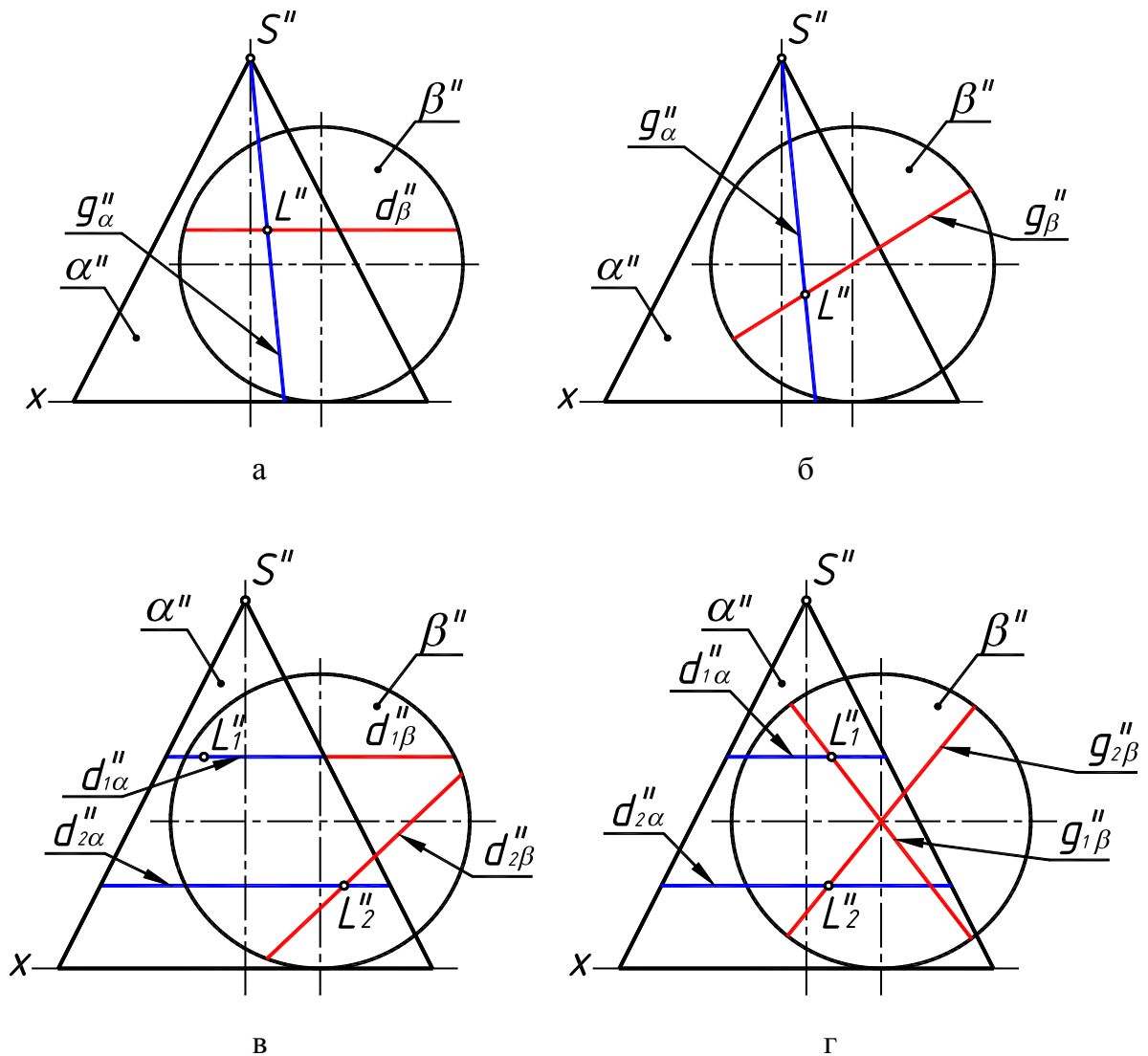


Рис.3

2. Выбираем одну из пар теоретически пересекающихся линий $g_{\alpha} \cap d_{\beta}$ (образующие конуса пересекают параллели сферы) (рис.3а).

II. Разрабатываем алгоритмическую часть определителя [A]: устанавливаем взаимосвязи между линиями и законы их перемещения относительно друг друга.

1. Устанавливаем функции линий: g – образующая, d – направляющая.

2. Устанавливаем особенности расположения линий в исходных поверхностях.

- В поверхности α все образующие проходят через одну точку S (вершину конуса).

- В поверхности β направляющие d_{β} могут иметь произвольное расположение, перпендикулярное оси вращения сферы. Поскольку у сферы бесчисленное множество осей вращения, то и параллели могут располагаться в самом различном направлении.

[Оглавление](#)

3. Устанавливаем закон перемещения образующих по направляющим: образующие g_α проходят через одну точку S и должны перемещаться по окружности d_β .

III. В данном случае для выделенной пары линий $g_\alpha \cap d_\beta$ сформированные взаимосвязи однозначно определяют форму поверхности-посредника γ . Это коническая поверхность с вершиной в точке S и направляющей окружностью d_β (коническая поверхность с круговыми сечениями) (рис.4).

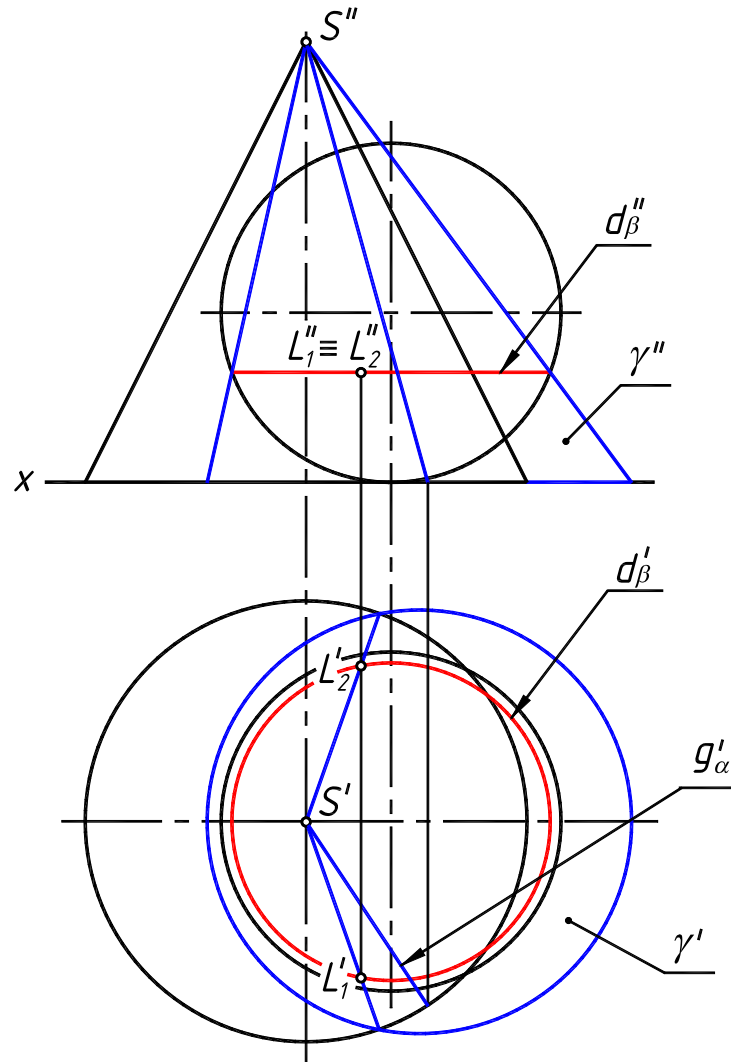


Рис.4

При введении поверхностей-посредников $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и т.д. мы будем получать точки линии пересечения L_1, L_2, L_3 и т.д.

Параллелей у сферы бесчисленное множество. Следовательно, разнообразных конических поверхностей в случае $g_\alpha \cap d_\beta$ тоже множество, т.к. в качестве направляющей d_β может служить любая параллель, представленная на рис.2б.

[Оглавление](#)

IV. Из множества конических посредников, которые мы можем создать, мы выбираем, как наиболее удобный, вариант, представленный на рис.4, т.к. в данном случае мы получаем конус с круговыми сечениями, что удобно для решения задачи.

* * *

Выбираем следующую пару теоретически пересекающихся линий $g_\alpha \cap g_\beta$ (рис.3б).

Здесь: g_α - прямые образующие конуса α ,
 g_β - окружности- меридианы сферы β : m_1, m_2, m_3 (рис.5).

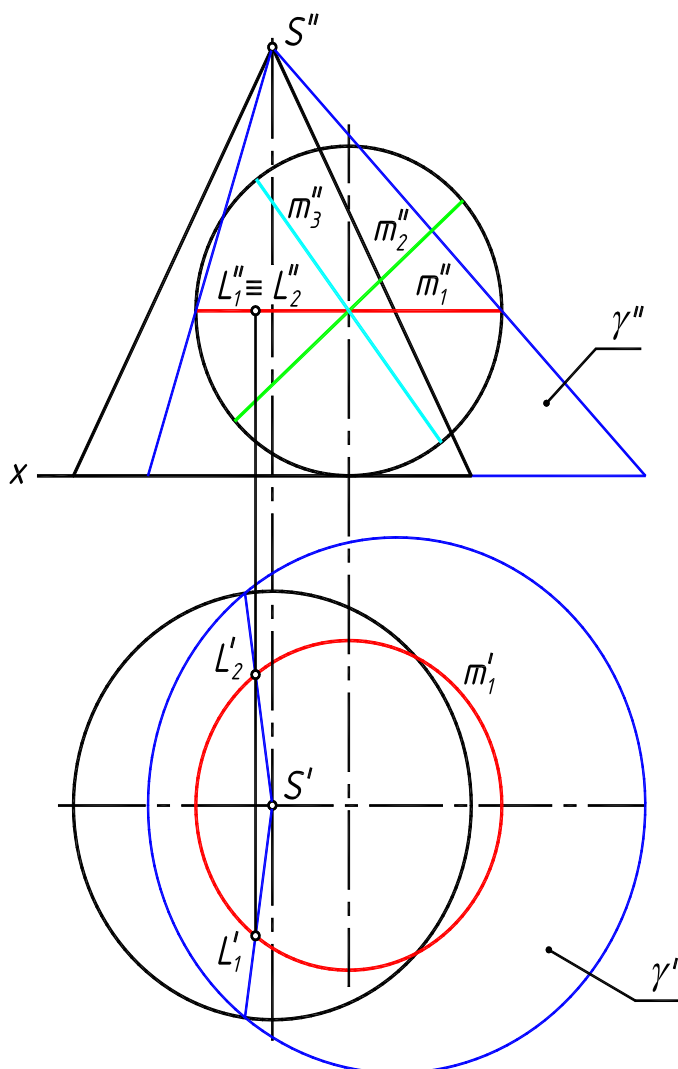


Рис.5

[Оглавление](#)

Этот вариант повторяет предыдущий с той лишь разницей, что меридианы – окружности одинакового диаметра. Поэтому в этом случае мы можем формировать конические поверхности, из которых удобной будет лишь одна: направляющей этой поверхности будет меридиан m_1 , т.к. в этом случае образуется конус с круговыми сечениями (рис.5).

* * *

$d_\alpha \cap d_\beta$ - следующая пара теоретически пересекающихся линий (рис.3г), где

d_α - окружности конической поверхности,

d_β - окружности параллелей сферы.

2. Устанавливаем особенности расположения линий в поверхностях.

d_α занимают положение параллельное плоскости π_1 ,

d_β занимают различное положение, в том числе и параллельное плоскости π_1 .

3. а) Линии d_α , параллельные плоскости π_1 , могут пересекать линии d_β , параллельные плоскости π_1 . В этом случае будет получаться ряд плоскостей-посредников, параллельных плоскости π_1 (рис.6).

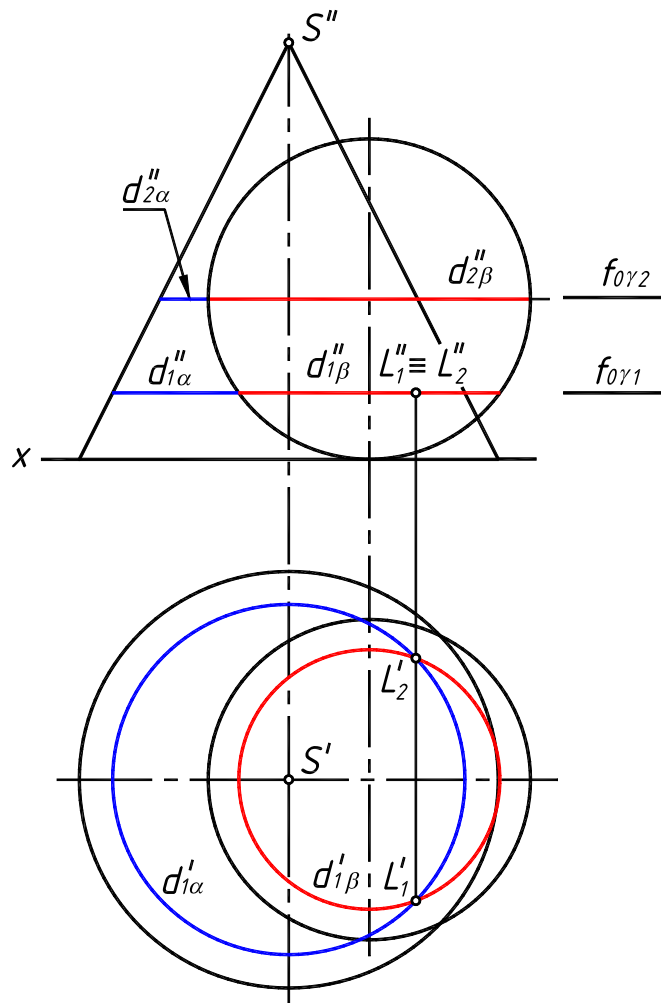


Рис.6

[Оглавление](#)

б) линии d_α , параллельные плоскости π_1 , могут пересекать линии d_β , не параллельные плоскости π_1 (рис.7). В каждом случае оси, перпендикулярные плоскостям окружностей d_α и d_β пересекаются, и мы имеем ряд центров сфер.

Каждый полученный центр является центром семейства концентрических сфер (рис.7). На фронтальной проекции к плоскости параллели d_β проведена фронтальная проекция перпендикуляра n'' , проходящего через центр ее окружности S_1 . Фронтальная проекция n'' пересекает проекцию i'' оси конуса в точке O_1'' . Точка O_1 является центром семейства концентрических сфер. Параллелей разных направлений на сфере множество. Следовательно, центров семейств концентрических сфер будет также множество (рис.8).

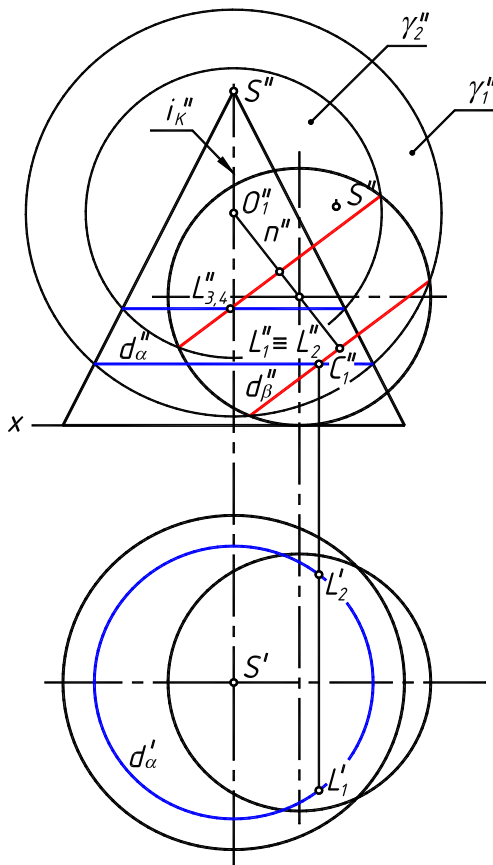


Рис.7

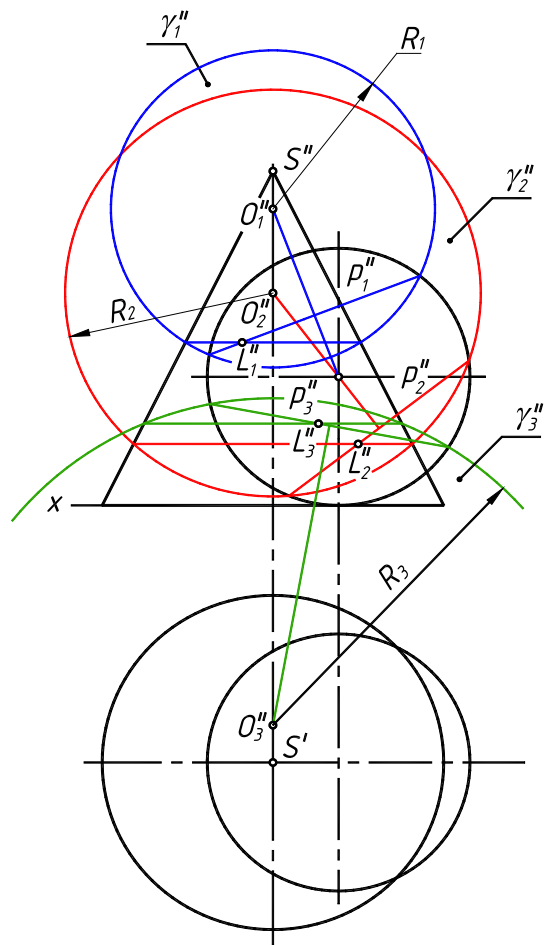


Рис.8

Каждая сфера может быть выбрана в качестве самостоятельного посредника. В этом случае мы имеем семейство концентрических сфер разного радиуса (рис.8).

$d_\alpha \cap g_\beta$ - следующая пара теоретически пересекающихся линий (рис.3г).

d_α - окружность конической поверхности;

g_β - окружность-меридиан.

[Оглавление](#)

1. Устанавливаем особенности расположения линий в поверхностях:
 d_α - занимает положение, параллельное плоскости π_1 ,
 g_β - занимает положение, произвольное относительно плоскостей проекций.

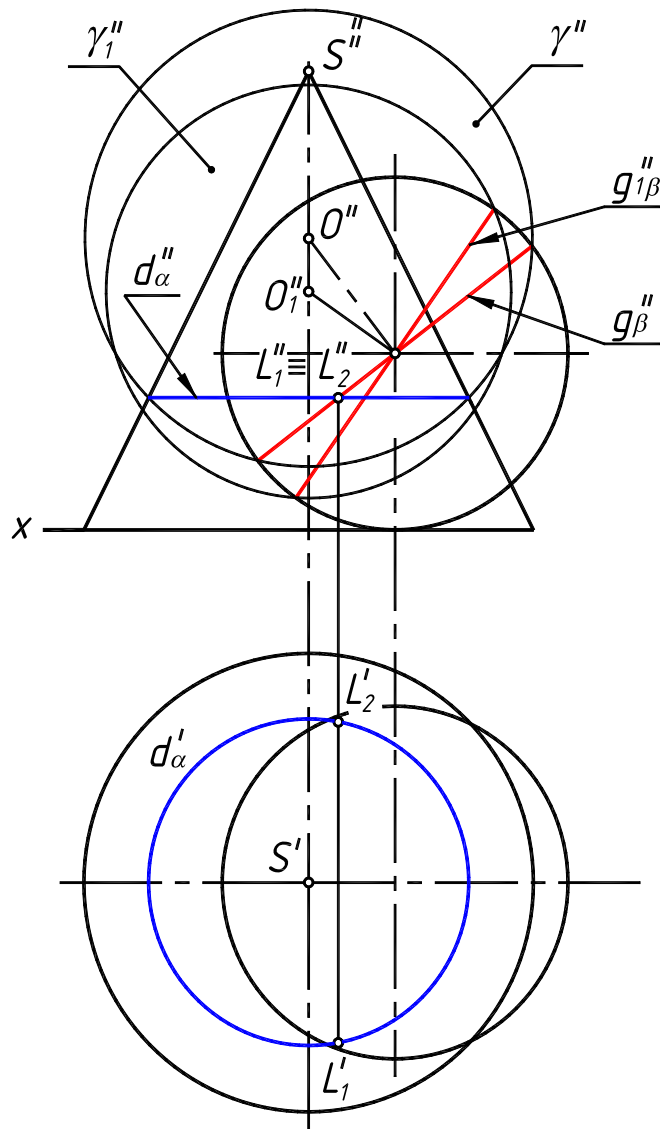


Рис.9

2. а) $d_\alpha \parallel \pi_1$ пересекает g_β не параллельную π_1 (экватор)

В этом случае пересекающиеся линии образуют плоскость-посредник. Эта плоскость одна. Её введение даёт возможность определить характерные точки линии пересечения – точки видимости для горизонтальной проекции.

б) $d_\alpha \parallel \pi_1$ пересекает g_β , произвольно расположенную относительно плоскости π_1 .

[Оглавление](#)

Этот вариант повторяет предыдущий, так как меридианы – это параллели сферы, особенностью которых является то, что их центры находятся в центре сферы, что обеспечивает одинаковый диаметр окружностей. Поэтому, как и в предыдущем случае, поверхностями- посредниками будут являться как семейства концентрических сфер, так и совокупность эксцентрических сфер (рис.7, 8, 9).

IV. Из разработанных семейств поверхностей-посредников наиболее простым для решения задачи является семейство параллельных горизонтальных плоскостей.

Рассмотрим те возможности, которые даёт предлагаемый способ конструирования поверхностей-посредников при решении студентами олимпийских задач (рис.10).

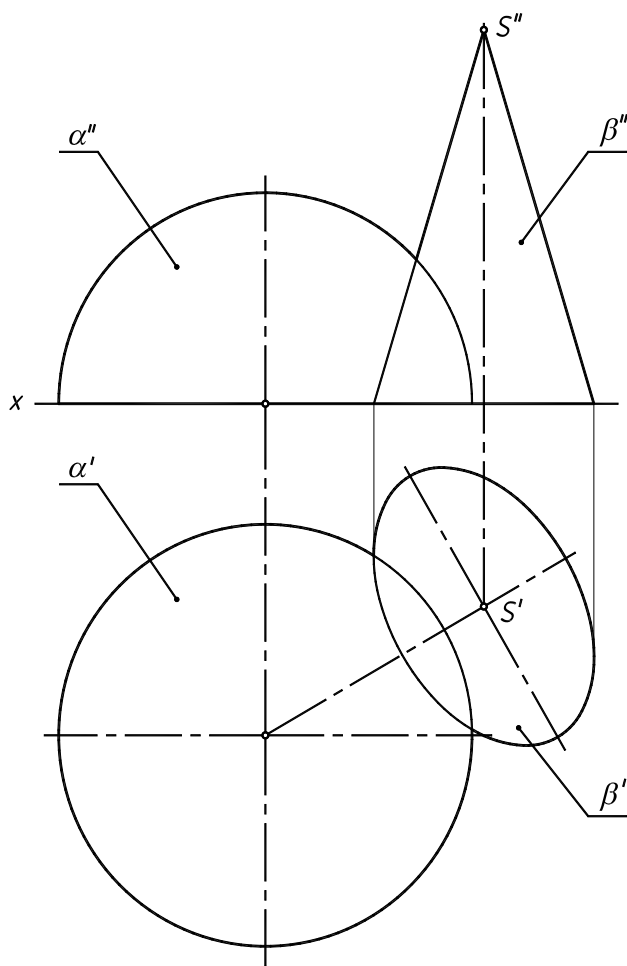


Рис.10

Дано:

α - поверхность полусферы,

β - поверхность эллиптического конуса.

Требуется сформировать поверхности-посредники, приводящие к построению линии пересечения данных поверхностей.

[Оглавление](#)

Используем сокращённый состав действий, согласно которому:

1. Выделяем в каждой исходной поверхности семейства простейших линий (прямых и окружностей).

а) Поверхность полусферы включает семейства окружностей $p_{сф}$.

б) Поверхность эллиптического конуса включает прямые образующие g_k , проходящие через вершину конуса и окружности a и b (рис.11).

Выделить семейства окружностей a и b на поверхности конуса можно, используя известную теорему о двойном касании поверхностей 2-го порядка, которая формулируется следующим образом: «если две поверхности 2-го порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания».

Если одной из поверхностей 2-го порядка является сфера, то, очевидно, линиями пересечения будут окружности (рис.11).

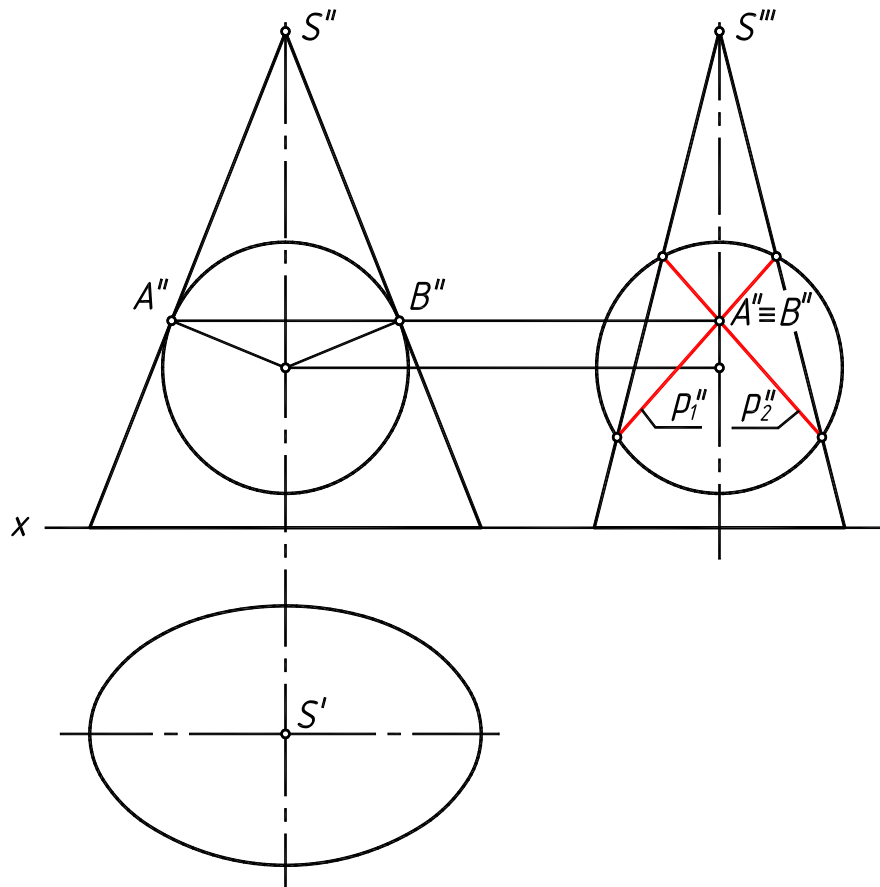


Рис.11

2. Создаём из выделенных простых линий пары теоретически пересекающихся линий: $g_k \cap p_{сф}$ и $p_{сф} \cap p_k$.

3. Формируем поверхности-посредники из выделенных пар линий.

Возьмём пару $g_k \cap p_{сф}$.

[Оглавление](#)

Сфера содержит множество окружностей, плоскости которых наклонены к плоскостям проекций под различными углами.

а) Рассмотрим вариант, когда окружности сферы параллельны горизонтальной плоскости проекций π_1 .

В этом случае окружности сферы и пересекающие их прямые, проходящие через точку S , образуют конические поверхности γ с круговыми сечениями, параллельными плоскости π_1 . Строим поверхность-посредник γ (рис.12).

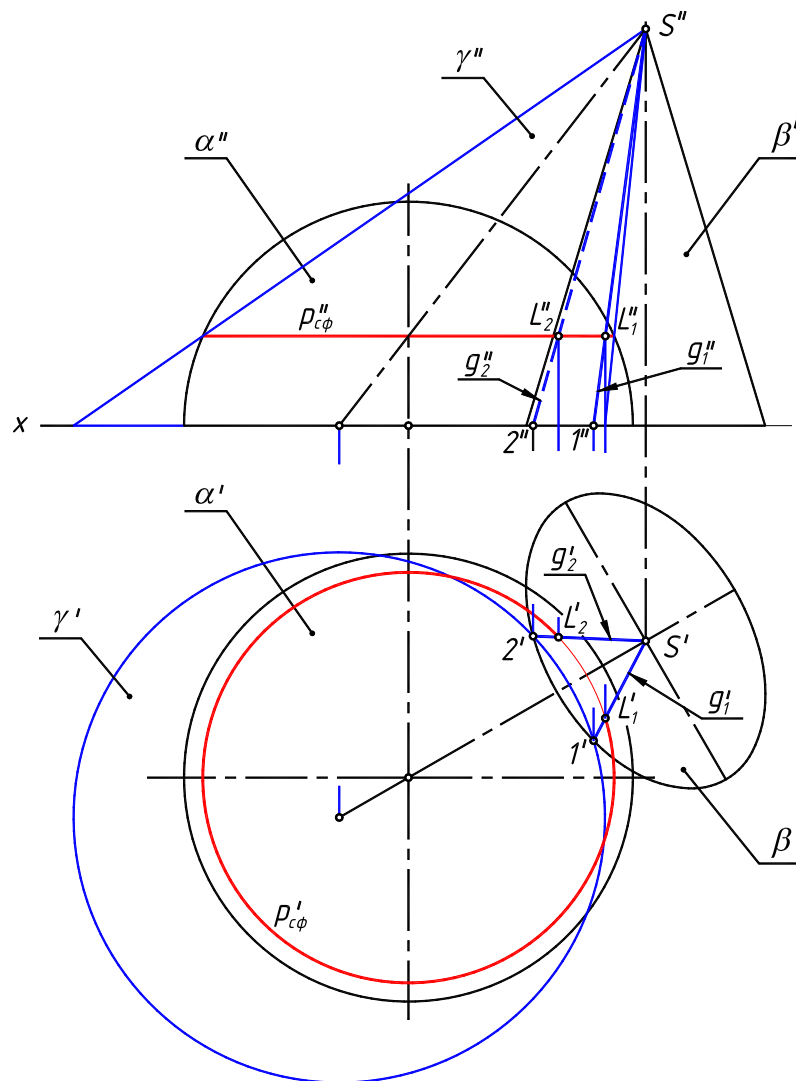


Рис.12

Выделяем параллель сферы $p_{сф}$. Через вершину конуса S проводим очерковые образующие поверхности-посредника γ (конус с круговыми сечениями).

Основание конуса γ пересекает основание конуса β в точках 1 и 2. Через эти точки проходят образующие g_1 и g_2 , по которым конус γ пересекает конус β . Точки L_1 и L_2 , в которых образующие g_1 и g_2 пересекают окружность $p_{сф}$, являются общими для поверхностей α и β , т.е. принадлежат линии их пересечения. Введя ряд

[Оглавление](#)

таких поверхностей-посредников, получаем необходимое количество точек для построения линии пересечения.

б) Рассмотрим вариант, когда плоскости полуокружности сферы занимают произвольное положение и перпендикулярны плоскости π_1 . В этом случае плоскости произвольных полуокружностей могут проходить через ось конуса i_k , перпендикулярно плоскости π_1 (рис.13).

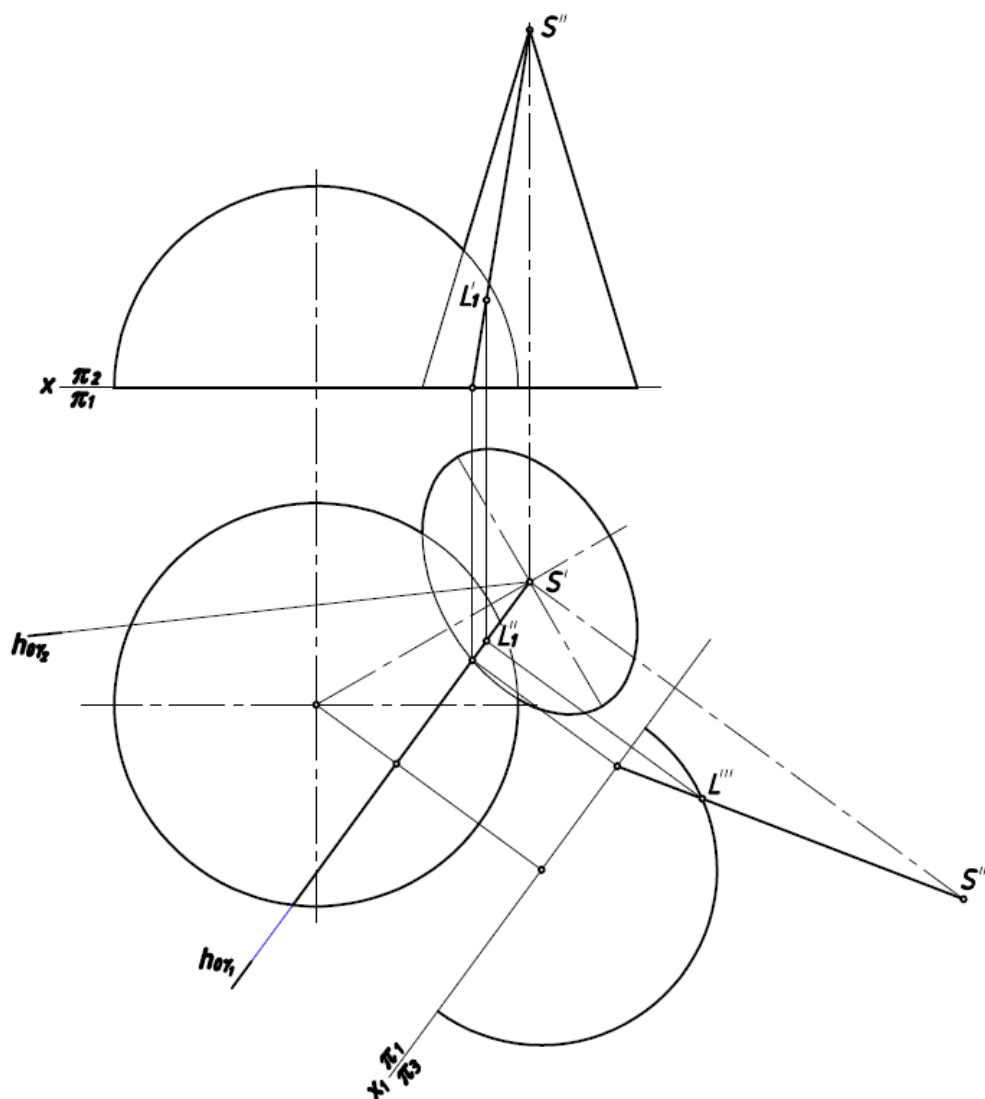


Рис.13

В этом случае мы будем иметь пучок горизонтально - проецирующих плоскостей, проходящих через ось конуса и пересекающих сферу по окружностям, а конус – по образующим. Плоскости- посредники γ_1 и γ_2 на чертеже (рис.13) заданы горизонтальными следами $h_0\gamma_1$ и $h_0\gamma_2$.

Чтобы построить точки линии пересечения нужно способом замены плоскостей проекций поставить каждую плоскость-посредник в удобное

[Оглавление](#)

положение, когда изображение будет проецироваться в истинную величину (рис.13). Так нужно поступить с каждым посредником.

б) Рассмотрим следующую пару выделенных на исходных поверхностях линий $p_{сф} \cap a$ (рис.14).

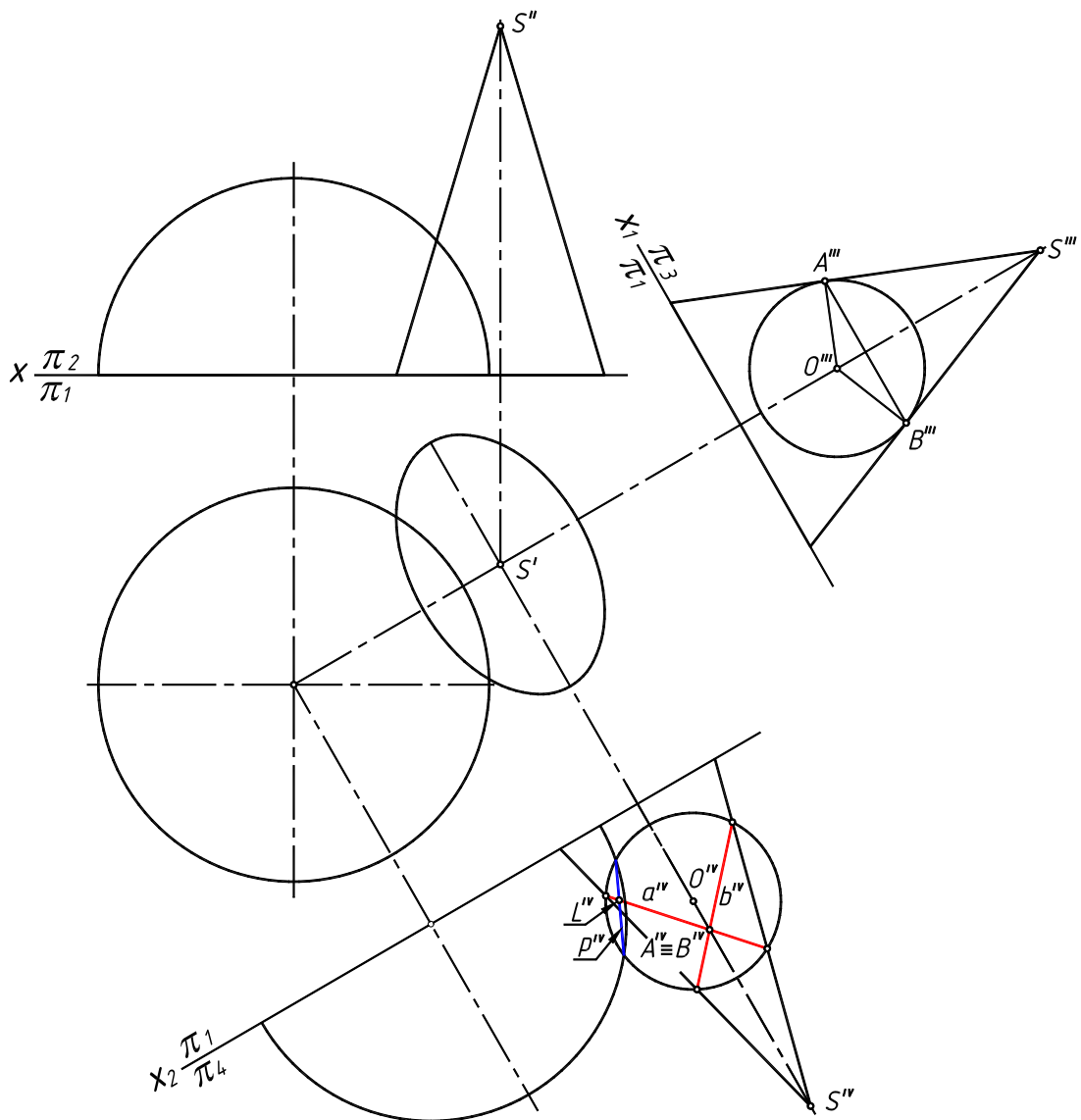


Рис.14

Чтобы получить на конусе окружности a , произведём две замены плоскостей проекций:

- заменяем плоскость π_2 на π_3 и вводим касательную сферу γ ;
- заменяем плоскость π_2 на π_4 , где получаем линии пересечения γ с β (окружности a и b).

Сфера γ пересекает сферу α по окружности p . Окружности a и p принадлежат одной сфере и пересекаются в точках L_1 и L_2 .

[Оглавление](#)

Вводя ряд таких поверхностей-посредников, можно получить множество точек линии пересечения.

Очевидно, что введение конических посредников более простой способ решения задачи.

Но, если студент на олимпиаде может представить не только решение трудной задачи, но и несколько вариантов, то это говорит о творческом подходе к решению задачи и глубоком знании предмета.

Литература

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии: учебное пособие для вузов: - М: Высшая школа. 2008
2. Колошина И.П., Добровольская Н.А. Творческие задачи на создание дополнительных построений. – Ростов на Дону. Издательство Ростовского университета, 1984.
3. Колошина И.П. Психология творческой деятельности – Москва. Изд-во ЮНИТИ 2008 г.
4. Пеклич В.А., Жирных Б.Г., Марков В.М. Задачи московских и российских олимпиад по начертательной геометрии. М. Изд-во Ассоциация строительных вузов. 2004 г.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия: учебник для вузов – М.ИИИРРА – 2008 г.

Оглавление