Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

**Ю.Э.Шарикян, А.Е.Одинцова, А.А.Кашу**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана**
**2012**

Юрий Этумович Шарикян
Алла Евграфовна Одинцова
Анна Анатольевна Кашу

Методические указания к выполнению домашнего задания по начертательной геометрии.

Рецензент Б.Г.Жирных
Электронная версия Б.Г.Жирных

Методические указания написаны в помощь студентам, выполняющим домашнее задание по начертательной геометрии. Рассмотрены общие схемы и принципы решения задач, требования к оформлению домашнего задания. Приведены вопросы для проработки учебного материала перед защитой домашнего задания

Для студентов первого курса, изучающих начертательную геометрию.

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

## 1.1. Некоторые методические рекомендации по изучению начертательной геометрии

Целью изучения начертательной геометрии является овладение методами построения графически точных и метрически определенных изображений пространственных форм на плоскости и применение графических способов решения задач, относящихся к этим формам. Владение методами построения и преобразования пространственных образов составляет основу профессионального мышления инженера, формирование которого является главной задачей обучения в техническом вузе.

Важно отметить, что студенты, которые не усвоили твердо основные принципы построения чертежей, не смогут впоследствии использовать компьютер как средство конструирования.

Начертательная геометрия относится к числу наиболее трудных предметов, как в силу своей специфики, так и вследствие того, что этот предмет не имеет прямых аналогов среди школьных дисциплин.

В этом курсе вводится большое число новых понятий, условностей, обозначений. Затрудняет обучение также отсутствие у большинства студентов навыков точных геометрических построений. Сложность восприятия материала обусловлена и тем, что непосредственные построения на чертеже, выполняемые по законам планиметрии и адекватно отражающие определенные действия в пространстве, не тождественны друг другу.

Из всего сказанного следует, что изучение начертательной геометрии требует от студента постоянной и систематической проработки материала с самого начала обучения при наличии соответствующих базовых знаний по элементарной геометрии. Отсутствие такой базы следует восполнить самостоятельно. Особенно важно на самых первых этапах изучения дисциплины понять и выучить основные определения и положения начертательной геометрии, правильно применять специальные термины, в частности: плоскости и оси проекции; четверти пространства; проекции точки; как определить координаты точки в пространстве по чертежу; как выяснить, в какой четверти пространства расположена точка, какое положение относительно плоскости проекций занимает прямая и т.д. Без свободного владения этой «азбукой» предмета дальнейшее его изучение будет чрезвычайно затруднено.

## 1.2. Общий подход к решению задач начертательной геометрии

Специфика начертательной геометрии заключается в том, что изучение теоретического материала происходит через его использование при решении конкретных задач. Основное содержание курса состоит в решении задач.

Все задачи начертательной геометрии можно условно разделить на две группы;

1) элементарные задачи - операции, являющиеся реализацией на чертеже правила, теоремы, приема и выполняемые по образцу или точному предписанию;

2) комплексные задачи, представляющие собой некоторый набор элементарных задач, которые надо выполнить в определенной, логически оправданной последовательности. Определение такой последовательности и составление плана решения задачи представляют, как правило, наибольшую трудность для студента.

Основной класс задач в начертательной геометрии - задачи на построение. Чаще всего в задаче требуется построить проекции какой-либо фигуры по заданным условиям или (и) определить некоторые метрические характеристики фигуры по чертежу. Несмотря на то, что содержание каждой конкретной задачи уникально, можно выявить общую методологию для их решения, которой следует придерживаться. Опыт оказывает, что когда студент применяет правильный подход к проблеме, многие трудности, связанные с решением задачи, отступают. Организованный подход к решению задачи ценен тем, что указывает не только последовательность действий в случаях, когда ход решения для студентов очевиден, но и направление поиска решения в затруднительных случаях.

Общая схема решения задач на построение известна из элементарной геометрии. Она состоит из пяти этапов:

1) Анализ условия задачи.
2) Определение последовательности действий, т.е. составление плана решения задачи в пространстве.
3) Выполнение построений - реализация плана решения на чертеже конкретными способами.
4) Исследование - выявление условий существования решения и числа возможных решений (ответов).
5) Доказательство правильности решения.

Анализ условия задачи – очень важный этап ее решения, который, как правило, недооценивается студентами, проводится наспех или не проводится совсем, что ведет к неправильному определению последовательности действий, ошибкам в решении либо вообще к невозможности для студента решить задачу. Цель анализа - установить связи между заданными и искомыми геометрическими фигурами, определить какие построения и в какой последовательности надо выполнить, чтобы получить искомую геометрическую фигуру. Анализ заключается в разбиении условий задачи на части, т.е. на ряд отдельных относительно независимых условий, наложенных на искомую фигуру. Каждому из выделенных условий надо поставить в соответствие некоторую геометрическую фигуру, все точки которой обладают определенным свойством. Пересечение выявленных геометрических фигур дает множество точек (фигуру), которые будут обладать всеми свойствами одновременно и удовлетворять условию задачи.

Анализ можно проводить устно или письменно, сопровождать наглядным изображением, построенным приблизительно и отражающим требования к искомой фигуре. Результатом анализа является определение последовательности действий, промежуточных построений и составление плана решения задачи в пространстве. План должен содержать основные этапы решения задачи и быть инвариантным (не зависимым) от конкретного способа его реализации. Отдельные пункты этого плана могут быть выполнены различными способами, арсенал которых к концу изучения курса будет достаточно широк.

Выполнение построений на чертеже сводится к решению ряда элементарных задач и выполнению операций конкретными способами в установленной планом последовательности на основании правил и теорем начертательной геометрии, знание которых, а также точность построений обеспечат правильность решения задачи.

Исследование имеет целью выявление возможного числа решений (ответов) задачи и условий их существования. Исследование можно проводить и сразу после анализа условий задачи с тем, чтобы при решении задачи не «потерять» другие возможные положения искомой геометрической фигуры, также удовлетворяющие условию задачи

Доказательство устанавливает правильность решения, подтверждая соблюдение всех свойств на основании теорем элементарной и начертательной геометрии.

Рассмотрим действие приведенной схемы на конкретном примере (рис.1). Даны прямая $l$ и точка $A$. Построить квадрат $ABCD$ со стороной $BC$, принадлежащей прямой $l$.

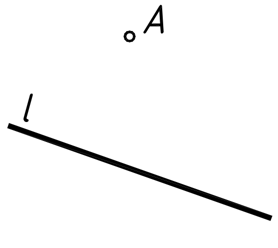


Рис.1

Проведем анализ. Рассмотрим геометрические свойства квадрата.

Все стороны квадрата равны по величине, противоположные стороны параллельны, углы при вершинах составляют $90^{O}$.

Теперь можем составить план решения в пространстве:

а) так как стороны квадрата $AB$ и $BC$ перпендикулярны, а сторона $BC$ принадлежит прямой $l$, надо из точки $A$ опустить перпендикуляр на прямую $l$ для нахождения точки $B$;

б) сторона квадрата $BC$ принадлежит прямой $l$, следовательно, на прямой $l$ от точки $B$ надо отложить отрезок прямой, равный стороне квадрата *[AB]* (находим точку *C* );

в) противоположные стороны квадрата параллельны, следовательно, из точки *A* проводим прямую, параллельную *l* (стороне *BC*), а через точку *C* - параллельно стороне *AB* и на пересечении проведенных прямых получаем точку *D*. Точку *D* можно было найти, проведя одну из указанных прямых и откладывая на ней величину стороны квадрата. Перед выполнением построений на чертеже проведем исследование. После нахождения точки *B* мы должны на прямой *l* от этой точки отложить отрезок, равный стороне квадрата. Его можно отложить в разные стороны от точки *B*. Следовательно, задача имеет два решения. В дальнейшем мы выберем одно из решений.

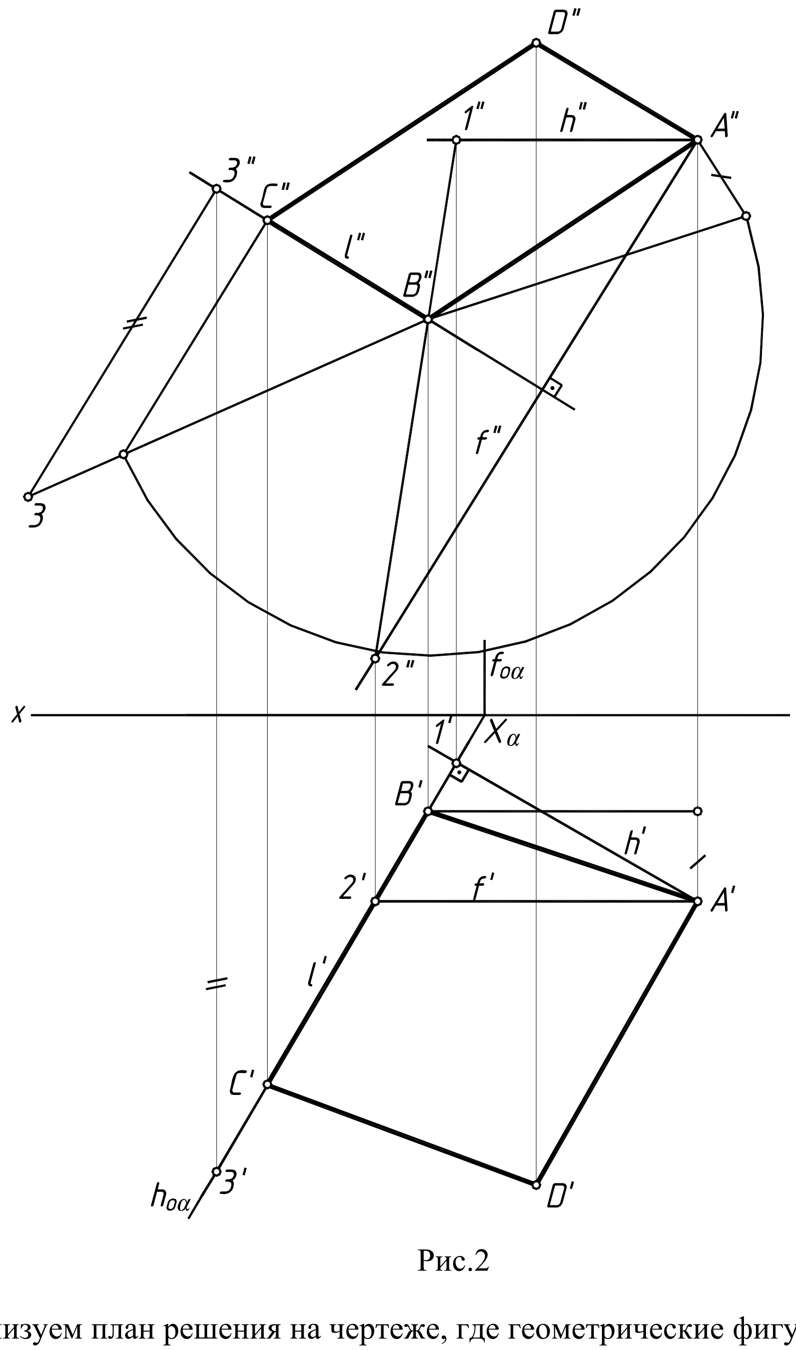


Рис.2

Теперь реализуем план решения на чертеже, где геометрические фигуры заданы своими проекциями (рис.2). Согласно составленному алгоритму решения задачи, мы должны из точки *A* опустить перпендикуляр на прямую *l* . Так как прямая *l* не параллельна какой-либо плоскости проекций, нет частного случая проецирования прямого угла. Множеством прямых, проходящих через точку *A* и составляющих с прямой *l* угол, равный 90°, является плоскость, проходящая через точку *A* и перпендикулярная прямой *l* . Через точку *A* проведем такую плоскость и зададим ее горизонталью $h$ ($h'$, $h''$) и фронталью $f$ ($f'$, $f''$). Этой плоскости принадлежит искомый перпендикуляр. Теперь найдем точку пересечения прямой $l$ с проведенной плоскостью, для чего заключим прямую $l$ в плоскость $\alpha$ (горизонтально проецирующую, заданную горизонтальным следом $h_{0\alpha}$). Найдем пересечение плоскости $\alpha$ с плоскостью, проведенной через точку $A$ (прямая $1$, $2$). На пересечении прямой ($1$, $2$) с $l$ получим точку $B$.

Теперь определим длину отрезка $AB$ известным построением прямоугольного треугольника.

Далее на прямой $l$ от точки $B$ отложим (в выбранную нами сторону) отрезок, равный по величине стороне квадрата. И, наконец, определим точку $D$, проведя из точек $A$ и $C$ прямые параллельно соответствующим сторонам квадрата и найдя их пересечение.

Более подробное объяснение всех построений на чертеже будет дано при рассмотрении соответствующих примеров.

Правильность построений при решении задачи можно определить подтверждением соблюдения всех свойств искомой фигуры (квадрата), Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ являются вершинами квадрата. Их одноименные проекции расположены на одной вертикальной линии связи и на пересечении одноименных проекций сторон квадрата. Стороны квадрата равны по величине, и углы при их вершинах составляют 90°. Это было обеспечено соответствующими построениями. Противоположные стороны квадрата параллельны, так как на чертеже параллельны их одноименные проекции. Сторона квадрата $BC$ принадлежит прямой $l$ , т.к. ее проекции принадлежит одноименным проекциям прямой $l$ ,

Рассмотрение приведенного примера убеждает в том, что для успешного освоения начертательной геометрии и решения задач студентам необходимо твердо знать основные положения и теоремы элементарной геометрии. Особенно часто и широко используются свойства геометрических фигур, являющихся множеством точек (линий), обладающих общим свойствами (геометрические места точек), признаки частных случаев взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, методы определения линейных и угловых расстояний между различными геометрическими фигурами.

Некоторые из наиболее часто используемых в начертательной геометрии свойств геометрических фигур и положений элементарной геометрии приведены в приложении (см. стр.40-41).

### 1.3. Цель, содержание домашнего задания и общие требования к его оформлению

Целью выполнения домашнего задания является проработка соответствующих разделов курса начертательной геометрии посредством самостоятельного решения каждой задачи задания. При этом студенты используют теоретические положения курса для выполнения практических действий на чертеже.

Домашнее задание по начертательной геометрии включает шесть задач по узловым темам курса. Число задач домашнего задания для студентов некоторых специальностей может быть уменьшено, Точное число и тематика задач будут указаны преподавателем.

Тематика задач домашнего задания:

1. Построение плоских фигур.
2. Точки и линии на поверхности.
3. Способы преобразования чертежа.
4. Пересечение поверхностей.
5. Пересечение прямой с поверхностью; касательная плоскость.
6. Построение пространственных геометрических фигур.

В пределах общей тематики каждый студент получает индивидуальное задание (варианты 1 - 30). Задание выполняется в течение всего семестра в соответствии с планом лекций и практических занятий. Для обеспечения систематической и своевременной проработки материала домашнее задание разбито на три части по две задачи в каждой из них; сроки сдачи каждой его части указаны в учебном плане.

Каждая задача должна быть выполнена на отдельном листе чертежной бумага формата А3 в карандаше с соблюдением требований стандартов ЕСКД: ГОСТ 2.303-68 "Линии" и ГОСТ 2.304-81 "Шрифты чертежные". Масштаб изображения 1:1 (координаты точек и другие размеры указаны в заданиях в миллиметрах). В правом нижнем углу формата размещают основную надпись, выполненную по образцу, представленному в экспозиции на кафедре.

### 1.4. Порядок выполнения домашнего задания

Рекомендуется следующий порядок работы над задачами домашнего задания. Прежде всего, следует попытаться решить задачу самостоятельно, используя материалы лекций, практических занятий и рекомендованную литературу. Необходимо вычертить решение в тонких линиях на заготовленном формате (см. выше) и предъявить его преподавателю в специально выделенное для консультаций время для объяснения решения и его защиты. Если задача решена правильно, а объяснения студента и ответы, на дополнительные вопросы по данной теме удовлетворительны, преподаватель дает письменное разрешение на обводку и окончательное оформление чертежа. Подпись преподавателя в основной надписи свидетельствует об окончании работы над задачей.

Если при первом предъявлении задача решена неправильно, ее следует исправить (на чертежах, выполненных в тонких линиях, допускаются любые исправления без ущерба для качества окончательного чертежа) и защитить на следующей консультации. Если студент затрудняется решить задачу, ему следует вычертить условие задачи на листе и явиться на консультацию, где ему будут даны необходимые разъяснения и оказана помощь,

Выполненные, защищенные и подписанные преподавателем задачи предъявляются на итоговое контрольное мероприятие по курсу начертательной геометрии.

# 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

## 2.1. Построение плоских фигур

### 2.1.1. Подготовка к решению задачи

Прежде чем приступить к решению задачи, студент должен убедиться в том, что он проработал и понял следующие фундаментальные положения начертательной геометрии, связанные с проецированием точки, прямой и плоскости:

- инвариантные свойства параллельного проецирования;
- основные правила проецирования точки; координаты точки в пространстве и определение их по чертежу;
- определение положения прямых относительно плоскостей проекций по их заданию на чертеже;
- теорему о принадлежности точки прямой;
- теорему о делении отрезка в заданном отношении;
- правило прямоугольного треугольника для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций по ее чертежу;
- теорему о частном случае проецирования прямого угла;
- способы задания плоскости на чертеже; прямая и точка в плоскости; линии особого положения в плоскости - линии уровня и линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций.

Опираясь на указанные знания, студент должен уметь выполнить на чертеже следующие действия:

- определить натуральную величину отрезка прямой общего положения методом прямоугольного треугольника, используя в качестве опорного катета любую из проекций отрезка; определить величины углов наклона прямой к каждой из плоскостей проекций;

- отложить на прямой, общего или частного положения отрезок заданной величины; построить в заданной плоскости произвольную горизонталь, фронталь и линии, определяющие углы наклона плоскости к каждой из плоскостей проекций, и определить величины этих углов.

Все эти элементарные задачи рассматриваются на практических занятиях.

### 2.1.2. Рекомендации к решению задачи и выполнению построений

Вне зависимости от конкретного условия задачи ее решение складывается из следующих этапов:

1. Построение высоты фигуры и определение натуральной величины этой высоты.
2. Определение положения всех вершин искомого многоугольника и построение его проекций.
3. Определение величины углов (см. условие задачи).

Во всех задачах сторона *MN* параллельна одной из плоскостей проекций, поэтому для построения высоты *AK* фигуры (этап 1) можно использовать частный случай проецирования прямого угла (рис. 3).

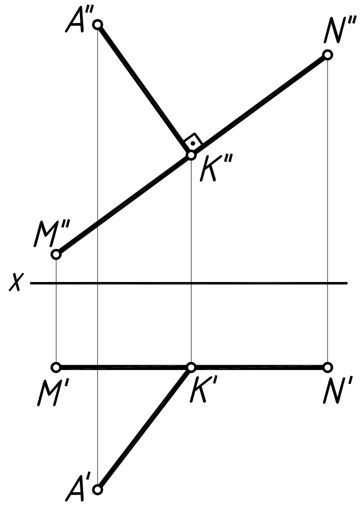


Рис.3

Действительную величину отрезка *AK* определяем методом прямоугольного треугольника, так как *AK*- отрезок прямой общего положения. В качестве опорного катета для этой цели может быть выбрана любая его проекция.

Построение вершин искомого многоугольника (этап 2). Высота фигуры в сочетании с остальными ее параметрами, указанными в условии, позволяет построить искомую фигуру планиметрически, что в большинстве случаев целесообразно сделать на свободном месте чертежа. Задача теперь заключается в том, чтобы построить проекции этой фигуры с учетом всех искажений ее линейных и угловых величин, обусловленных общим положением ее плоскости. При этом необходимо помнить следующее: а) искажение длин отрезков при проецировании зависит от угла наклона прямой к плоскости проекций; б) искажение линейных величин (длин отрезков) при проецировании может быть определено и учтено, если известны проекции прямых, которым эти отрезки принадлежат; в) разные и не параллельные друг другу прямые проецируются с разным искажением, так как эти прямые наклонены под разными углами к плоскостям проекций; г) непосредственно использовать заданные угловые величины при построении проекций фигуры, лежащей в плоскости общего положения, невозможно, так как нельзя заранее установить степень искажения угловых величин при проецировании.

Следовательно, для определения положения проекций вершины $B$, принадлежащей прямой $MN$ , мы не можем непосредственно воспользоваться известными размерами боковой стороны $AB$ треугольника или параллелограмма или величиной угла φ в трапеции, так как проекций прямой $AB$ на чертеже нет - ее положение как раз и надо определить, Для нахождения точки $B$ следует воспользоваться теми линейными размерами искомой фигуры, которые измеряются вдоль прямых и проекции которых на чертеже уже есть. В нашем случае это отрезок $KB$ , принадлежащий прямой $MN$ (половина стороны треугольника, часть основания параллелограмма или трапеции). Определяем эту величину графически, т.е. с помощью планиметрического чертежа. Так как заданная прямая $MN$, которой принадлежит отрезок $KB$ , является линией уровня, на соответствующую плоскость проекций этот отрезок проецируется без искажения, что и следует использовать при построении проекций точки $B$.

Построение оставшихся вершин искомой фигуры не представляет сложности. Так, в задачах на построение прямоугольника достаточно отложить от точки $K$ (основания высоты) отрезок $KC = KB$ и замкнуть фигуру. При построении параллелограмма вершина $C \subset MN$ находится на расстоянии 100 мм от построенной точки $B$. При выполнении этой операции еще раз используем свойство проекций линий уровня. Проекции четвертой вершины $D$ находятся на пересечении проекций прямых, соответственно параллельных $AB$ и $BC$ и проведенных через вершины $A$ и $C$ . (Проверьте, чтобы фронтальная и горизонтальная проекция точки $D$ лежали на одной вертикальной линии связи).

Условие задачи предусматривает определение четырех угловых величин: двух углов наклона высоты фигуры к плоскостям проекций и двух углов наклона плоскости фигуры к плоскостям проекций (этап 3).

Для выполнения первой части задания этого этапа необходимо построить треугольники натуральных величин на обеих проекциях отрезка (один из них был построен ранее - см. этап 1) и отметить угол между горизонтальной проекцией отрезка $b$ гипотенузой треугольника - угол α наклона высоты $AK$ к $\pi_1$, а затем угол между фронтальной проекцией высоты и гипотенузой в другом треугольнике - угол $\beta$ между $AK$ и $\pi_2$ . Обратите внимание, что эти треугольники в общем случае не конгруэнтны, хотя и имеют равные гипотенузы (истинная величина одного и того же отрезка $AK$).

На рис. 4 показаны построения по определению длины отрезка $AB$ и углов наклона его к плоскостям проекций.

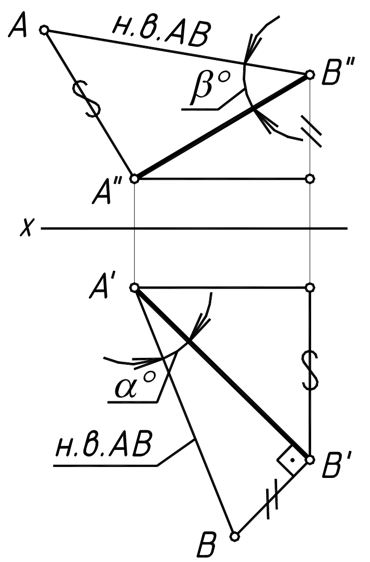


Рис.4

Для определения двух оставшихся углов следует провести в плоскости фигуры линии наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций, одну из них - перпендикулярно фронтали плоскости, другую - перпендикулярно горизонтали плоскости. Так как заданная прямая *MN*, на которой лежит основание фигуры, по условию параллельна одной из плоскостей проекций, а высота *AK* фигуры ей перпендикулярна один из углов наклона плоской фигуры к плоскостям проекций совпадает с углом наклона самой высоты к этой плоскости проекций. Таким образом, он определен. Для определения угла наклона плоскости фигуры к другой плоскости проекций следует провести в этой плоскости произвольную прямую, параллельную этой плоскости проекций, и любую прямую, перпендикулярную линии уровня и лежащую в плоскости фигуры, соблюдая теорему о частном случае проецирования прямого угла и правила принадлежности прямой заданной плоскости. Построив прямоугольный треугольник для определения истинной величины любого отрезка линии наибольшего наклона к этой плоскости проекций на одноименной проекции этого отрезка, получим искомый угол.

На рис. 5 отрезок *BD*, принадлежащий плоскости треугольника *ABC*, является линией наибольшего наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекций, а отрезок *BE* - линией наибольшего наклона к фронтальной плоскости проекций.

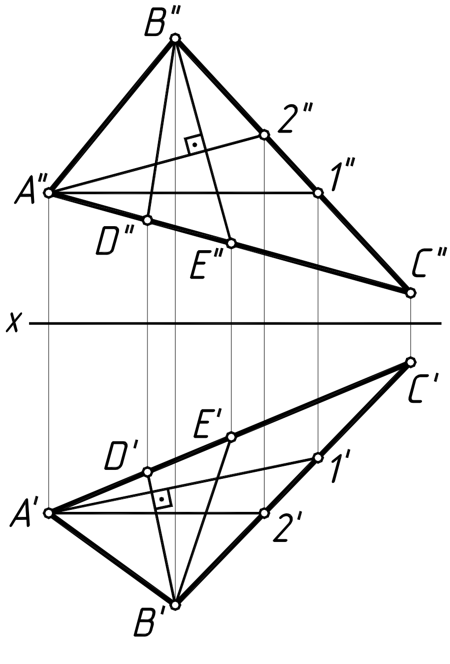


Рис.5

### 2.1.3. Вопросы для подготовки к защите

1. Как формулируется теорема о частном случае проецирования прямого угла?
2. Как определить истинную величину отрезка прямой и углы его наклона к плоскостям проекций?
3. С помощью каких линий особого положения, принадлежащих плоскости, можно определить углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций?
4. В каком случае отрезок прямой проецируется на плоскость проекций в натуральную величину?

## 2.2. Точки на поверхности

### 2.2.1. Подготовка к решению задачи

Перечислим фундаментальные положения начертательной геометрии, которые необходимо знать при решении данных задач:

- как начертательная геометрия рассматривает поверхность;

- образующая и направляющие поверхности;
- линейчатая и нелинейчатая поверхности;
- определитель поверхности;
- задание поверхности на чертеже;
- очерк поверхности;
- принадлежность точки и линии поверхности;
- нахождение недостающей проекции точки, принадлежащей поверхности.

Опираясь на знания указанных положений, студент должен выполнить на чертеже следующие действия:

- провести линию, принадлежащую заданной поверхности;
- на поверхности задать ряд ее образующих;
- определить, принадлежит ли точка поверхности;
- зная одну проекцию точки, принадлежащей поверхности, найти ее вторую проекцию.

### 2.2.2. Рекомендации к решению задачи и выполнению построений

Во всех случаях задана линейчатая поверхность.

Точка находится на поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности.

Для решения задачи по нахождению недостающей проекции точки принадлежащей поверхности, через заданную проекцию точки проводим одноименную проекцию линии, принадлежащей поверхности, Строим вторую проекцию проведенной линии и на ней находим вторую проекцию точки.

Желательно через точку на поверхности проводить прямую (образующую) или окружность.

На поверхности однополостного гиперболоида вращения через точку всегда можно провести окружность (параллель), принадлежащую плоскости, перпендикулярной оси вращения.

При заданном положении однополостного гиперболоида вращения относительно плоскостей проекций окружность (параллель) на фронтальную плоскость проекций проецируется в отрезок прямой, параллельный оси проекций $x$, а на горизонтальную плоскость проекций – в окружность.

Проведение через заданные точки окружностей, принадлежащих однополостному гиперболоиду вращения, не представляет сложности, поэтому мы не приводим чертеж этих построений (нужно только обратить внимание на возможность двух вариантов решения задач).
На поверхности косой плоскости (рис. 6) через горизонтальную проекцию точки М ( М ') можно провести горизонтальную проекцию образующей (прямой *1 2*), так как все образующие параллельны плоскости параллелизма $\alpha$, занимающей горизонтально проецирующее положение. Горизонтальная проекция образующей *1 2* (*1' 2* ') параллельна горизонтальному следу $h_{o\alpha}$.

Через фронтальную проекцию точки $N$ ( $N''$) нельзя провести фронтальную проекцию образующей, так как мы не знаем ее направления. Приходится проводить фронтальную проекцию кривой линии (хотя она может проецироваться на фронтальную плоскость проекций в прямую). Для нахождения горизонтальной проекции проведенной линии на поверхности косой плоскости проводим ряд образующих (сначала проводим их горизонтальные проекции) и находим точки пересечения образующих с проведенной линией. Строим горизонтальные проекции этих точек, через которые пройдет горизонтальная проекция проведенной линии. Этой линии принадлежит точка $N$ .

На поверхности косого геликоида через горизонтальную проекцию точки $M$ (М') можно провести горизонтальную проекцию образующей (все образующие пересекают ось винтовой поверхности). Фронтальную проекцию точки пересечения проведенной образующей с осью винтовой линии найти легко, так как известна разность координат $z$, крайних точек этих образующих (все образующие имеют одинаковый угол наклона к горизонтальной плоскости проекций).

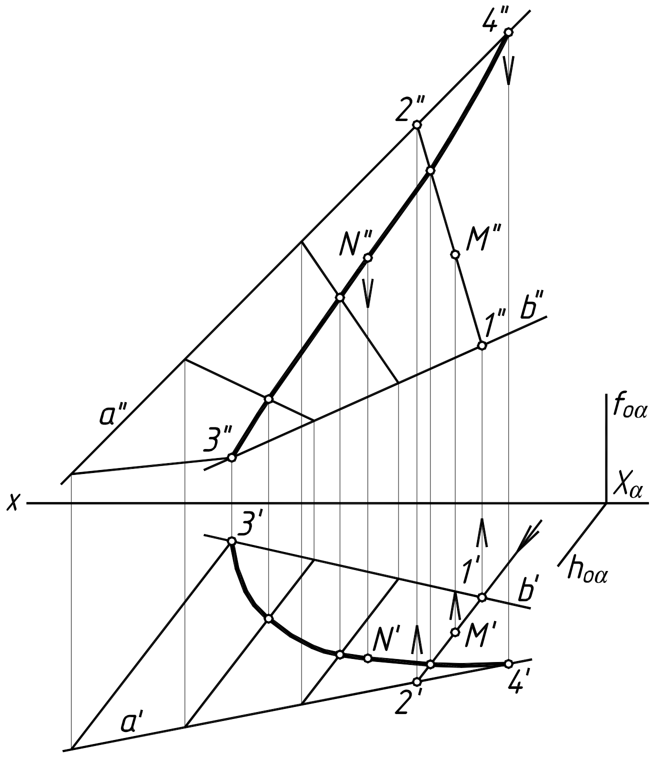


Рис. 6

Через фронтальную проекция точки $N$ ( $N''$) нельзя провести фронтальную проекцию образующей, так как мы не знаем ее направление. Приходится проводить фронтальную проекцию кривой линии (хотя она может проецироваться в прямую), как и для поверхности косой плоскости (см. рис. 6).

### 2.2.3. Вопросы для подготовки к защите

1. Какая поверхность задана на чертеже?
2. Какая линия является образующей поверхности?
3. Какие линии являются направляющими поверхности?
4. Как найти недостающую проекцию точки, принадлежащей поверхности?

## 2.3. Способы преобразования чертежа

### 2.3.1. Подготовка к решению задачи

Для всех вариантов по заданному чертежу пирамиды надо, используя способы преобразования чертежа, определить: высоту пирамиды, истинный вид основания, угол наклона одного из ребер к основанию, величину двугранного угла между одной из граней и основанием.

Для решения указанных задач необходимо знать следующие фундаментальные положения начертательной геометрии:

- сущность способа замены плоскостей проекций;
- сущность способа вращения вокруг линий уровня.

Кроме того, студент должен уметь:

- преобразовать чертеж так, чтобы заданные геометрические фигуры заняли частные положения относительно плоскостей проекций (параллельно или перпендикулярно);
- определить величину двугранного угла;

- определить величину угла между прямой и плоскостью.

Опираясь на указанные знания, студенту необходимо уметь выполнить на чертеже следующие действия:

- заменой плоскостей проекций преобразовать чертеж так, чтобы прямая стала параллельной (перпендикулярной) новой плоскости проекций;
- заменой плоскостей проекций преобразовать чертеж так, чтобы плоскость стала перпендикулярной новой плоскости проекций;
- повернуть плоскую фигуру вокруг линии уровня, чтобы она стала параллельной плоскости проекций,
- провести проекции прямой, перпендикулярной заданной плоскости.

### 2.3.2. Рекомендации к решению задачи и выполнению построений

Задание геометрических фигур в частных положениях относительно плоскостей проекций (параллельно или перпендикулярно им) значительно облегчает решение задач. Этого можно достигнуть, используя способы преобразования чертежа, не изменяя взаимного положения заданных фигур. В курсе начертательной геометрии изучают два способа преобразования чертежа: способ замены плоскостей проекций и способ вращения. Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что заданные геометрические фигуры остаются неподвижными, а плоскости проекций подвижны. При этом, имея систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, заменяют одну из плоскостей, а вторую оставляют. Новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна оставшейся. Такие замены можно проводить последовательно необходимое число раз,

На рис.7 даны две проекции точки *A*. Заменяем плоскость проекций $\pi_2$ на $\pi_3$, оставляя неизменной $\pi_1$. Находим $A'''$, исходя из неизменности координаты $z$ точки *A*.

Рассмотрим примеры использования способа замены плоскостей проекций для преобразования чертежа таким образом, чтобы прямые и плоскости заняли частные положения относительно новых выбранных плоскостей проекций.

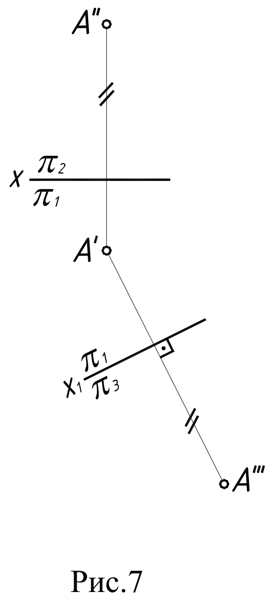


Рис.7

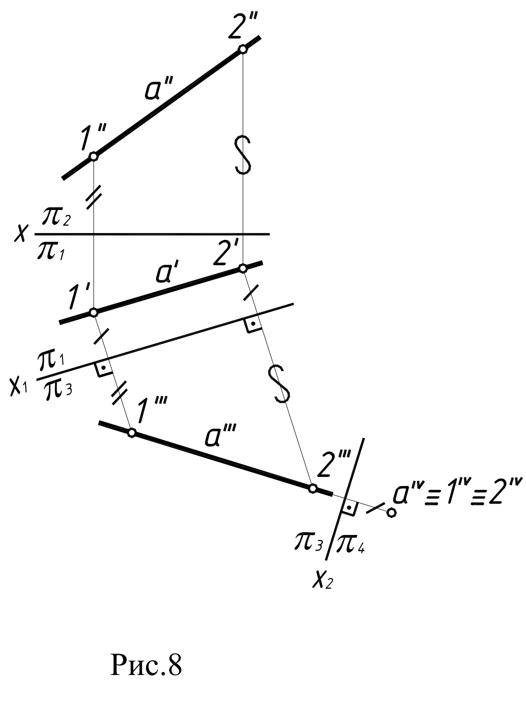


Рис.8

Чтобы прямая заняла положение, параллельное новой плоскости проекций (рис.8), выбираем ось $x_1$ параллельно $a'$ и строим проекции на плоскость $\pi_3$ двух точек, принадлежащих прямой. Теперь можно выбрать плоскость проекций $\pi_4$, относительно которой прямая $a$ будет перпендикулярна. Для этого ось проекций $x_2$ должна быть перпендикулярна $a'''$.

Внимательно изучите данный чертеж. Одной из важных характеристик решения задач начертательной геометрии является рациональность. Запомните, сколько замен плоскостей проекций необходимо произвести, чтобы прямую общего положения перевести в положение, параллельное (перпендикулярное) новой плоскости проекций.

Перевод плоскости из общего положения в проецирующее может быть облегчен с помощью какой-либо линии уровня (горизонтали или фронтали), принадлежащей плоскости. На рис. 9 плоскость общего положения задана двумя параллельными прямыми. Из курса геометрии известно, что плоскость, перпендикулярная другой плоскости, содержит перпендикуляр к этой плоскости. Иными словами, чтобы плоскость стала перпендикулярна новой плоскости проекций, надо поставить одну из прямых, принадлежащих плоскости, в положение, перпендикулярное новой плоскости проекций. За такую прямую выбираем $AB$, являющуюся горизонталью плоскости. Можно было использовать и прямую общего положения, но, как видно из предыдущего примера, она переводится в проецирующее положение большим числом замен плоскостей проекций. Все дальнейшие построения видны на чертеже.

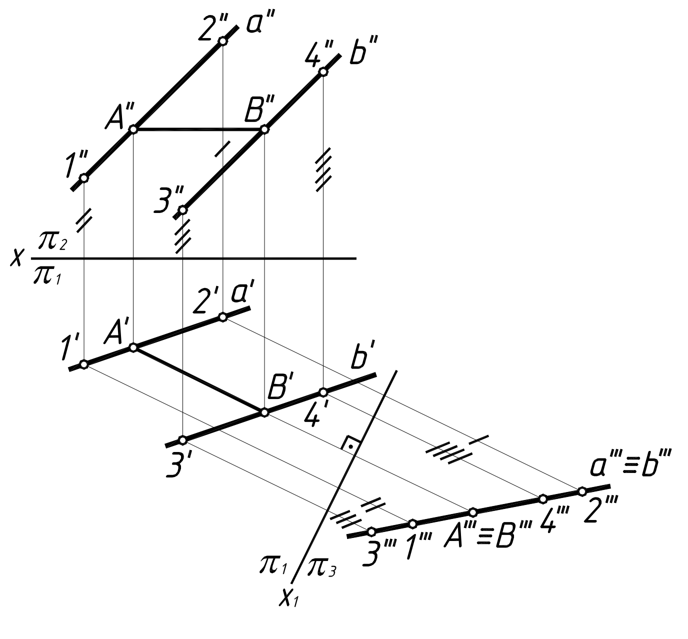


Рис.9

Второй заменой можно поставить заданную плоскость параллельно новой плоскости проекций $\pi_4$ (на чертеже не показано, так как этим практически пользоваться не будем).

Сущность способа вращения вокруг прямой, параллельной плоскости проекций, заключается в том, что плоскую фигуру поворачивают вокруг ее горизонтали или фронтали до положения, когда плоская фигура станет параллельной соответствующей плоскости проекций.

На рис. 10 плоскость задана прямой $h$ (горизонталью) и точкой $A$.

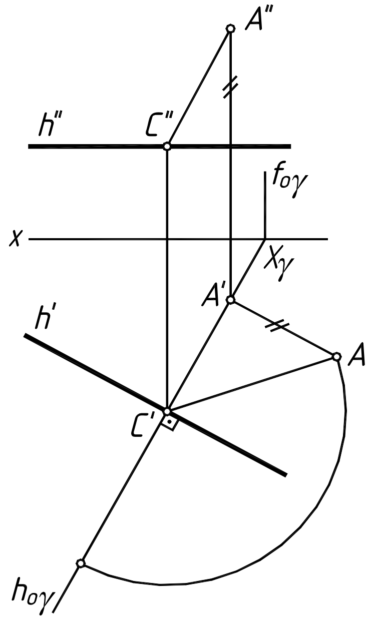


Рис.10

Вращаем плоскость вокруг горизонтали $h$, которая при этом остается на месте. Для нахождения положения плоскости после поворота достаточно повернуть точку $A$. Точка $A$ перемещается в плоскости γ, перпендикулярной оси вращения (горизонтали h). Точка перемещается по окружности с центром в точке $C$, являющейся точкой пересечения оси вращения $h$ с плоскостью $\gamma$ . Радиус окружности равен расстоянию от вращаемой точки $A$ до центра $C$ (отрезок $AC$). После поворота отрезок $AC$ будет проецироваться на $\pi_1$ без искажения. Находим его величину построением прямоугольного треугольника и откладываем от точки $C$. Таким образом, плоскость стала параллельной плоскости проекций и ее положение задано точкой $A(A'_1)$ и прямой $h$ ( $h'_1$ ) .

Как уже говорилось, по условию задачи требуется определить:

а) высоту пирамиды;
б) истинный вид основания $ABC$;
в) угол между плоскостями (гранью $SAB$ и основанием $ABC$);
г) угол между ребром $SA$ и основанием $ABC$ .

Высота пирамиды - это перпендикуляр, опущенный из вершины $S$ на основание $ABC$ . Для определения высоты надо преобразовать чертеж так, чтобы основание $ABC$ стало перпендикулярным новой плоскости проекций. Тогда на него легко опустить перпендикуляр, и он будет параллелен новой плоскости проекций, т.е. будет проецироваться на нее без искажения (рис. 11).

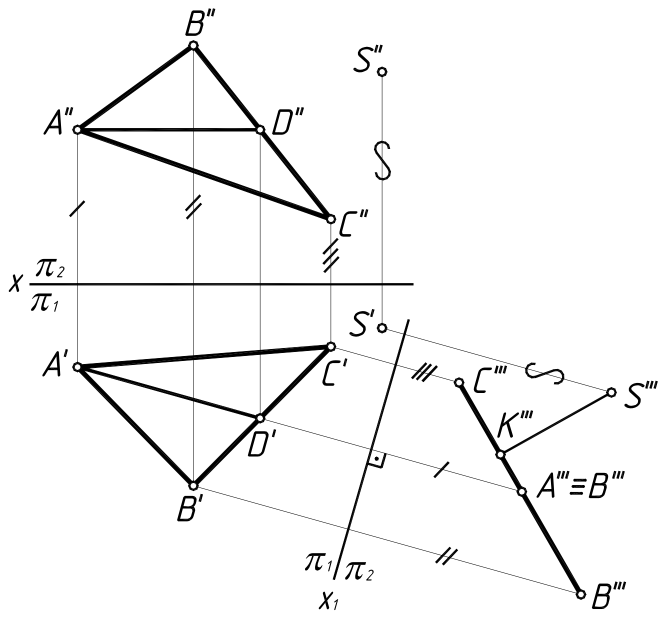


Рис.11

Для определения истинного вида основания *ABC* его надо повернуть вокруг горизонтали или фронтали до положения параллельного горизонтальной или фронтальной плоскости проекций (см. рис. 10).

Двугранный угол между плоскостями определяют величиной острого угла между прямыми, перпендикулярными прямой пересечения этих плоскостей (ребру двугранного угла) и принадлежащими заданным плоскостям. Если плоскость, заданная этими прямыми, будет параллельна какой-либо плоскости проекций, то угол между ними будет проецироваться на данную плоскость проекций без искажения. Это будет иметь место в случае, когда ребро двугранного угла будет перпендикулярно плоскости проекций. Поэтому необходимо преобразовать чертеж так, чтобы прямая *AB* заняла положение перпендикулярное новой плоскости проекций и найти новые проекции грани *SAB* и основания *ABC*. Они в этом случае будут проецироваться на эту плоскость проекций в прямые, так как будут перпендикулярны плоскости проекций (см. рис. 8).

Угол между прямой и плоскостью определяют величиной острого угла между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

Для нахождения величины угла между ребром *SA* и основанием *ABC* нет необходимости проецировать ребро *SA* на плоскость *ABC*.
На рис. 12 угол $\varphi°$ определяет величину угла между прямой *AB* и плоскостью $\alpha$. Но если из произвольной точки прямой А В (в нашем примере - из точки *B*) провести прямую, перпендикулярную плоскости $\alpha$ (именно провести, а не опустить перпендикуляр, т.е. не находить пересечение перпендикуляра с плоскостью), то угол между заданной прямой и проведенным перпендикуляром (угол $\gamma°$ ) будет равен $90° - \varphi°$. Поэтому через любую точку ребра *SA* надо провести прямую, перпендикулярную основанию *ABC*. Получим две пересекающиеся прямые: ребро *SA* и проведенный перпендикуляр. Плоскость, заданную этими пересекающимися прямыми, вращаем вокруг горизонтали или фронтали и определяем величину угла $\gamma°$. Теперь надо графически из 90° вычесть величину угла $\gamma°$ для определения величины угла $\varphi°$ (рис. 13).

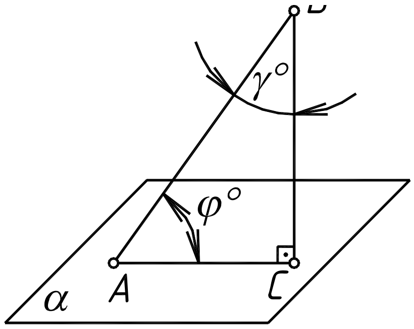


Рис.12.

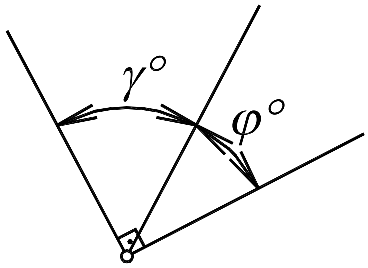


Рис.13

### 2.3.3. Вопросы для подготовки к защите

1. Для чего применяют способы преобразования чертежа?
2. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
3. В чем сущность способа вращения вокруг линий уровня?
4. Какой круг задач можно решать, используя способ вращения вокруг линий уровня?
5. Какой величиной определяют угол между прямой и плоскостью, как ее определяли в данной задаче?
6. Какой величиной определяют двугранный угол между плоскостями, как ее определяли в данной задаче?

## 2.4. Построение линий пересечения поверхностей

### 2.4.1, Подготовка к решению задачи

Задача по построению линии пересечения поверхностей может считаться наиболее сложной и трудоемкой из всех задач домашнего задания, так как при ее решении кроме знания материала, непосредственно относящегося к теме задачи, потребуется и умение использовать материал практически всего курса начертательной геометрии, изученный к данному моменту (темы: точка, прямая, плоскость, поверхности,, способы преобразования чертежа). К решению задачи не следует приступать раньше, чем будет освоен материал всех предыдущих разделов курса.

Необходимость определения большого числа промежуточных точек для построения проекций линий пересечения заданных поверхностей требует от студента высокой точности и аккуратности самих построений, отработанной техники черчения. Очень часто погрешность построения приводит я грубым смысловым ошибкам. При выполнении этой задачи следует особенное внимание уделить точности и тщательности построений.

Кроме того, построение проекций линий пересечения поверхностей требует учета большого числа признаков, факторов и особенностей проецирования как линий в целом, так и отдельных их участков. Поэтому при решении задачи следует особенно тщательно соблюдать рекомендуемый ниже порядок действий и этапность решения задачи.

Подготовку к решению задачи следует начать с проработки и повторения следующих основных положений:

1. Понятие о принципе построения линии пересечения поверхностей на чертеже и составление алгоритма решения данной задачи.
2. Построение линии пересечения поверхностей для случая, когда хотя бы одна из них занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций.
3. Принцип выбора вспомогательных секущих поверхностей при решении задачи по общему алгоритму для случая, когда ни одна из пересекающихся поверхностей не занимает проецирующего положения относительно какой-либо плоскости проекций.

4. Решение задачи с помощью вспомогательных плоскостей,
5. Способ вспомогательных концентрических сфер (в каких случаях его применяют).
6. Способ вспомогательных эксцентрических сфер (в каких случаях его применяют).
7. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка.

Успех решения каждой конкретной задачи в значительной мере зависит от того, насколько хорошо студент владеет материалом по теме "Поверхности". Способ их образования. Точка и линия на поверхности. Целесообразно повторить этот материал, обращая особое внимание на следующие вопросы:

1. Как определить, что точка принадлежит поверхности?
2. Какие поверхности являются носителями прямых линий, окружностей?
3. Какое положение относительно плоскостей проекций занимают прямые линии, окружности, принадлежащие этим поверхностям?
4. Как проецируются эти прямые линии, окружности при различном расположении поверхностей относительно плоскостей проекций?
5. Сколько, семейств окружностей существует на поверхности тора? Как они расположены?

В каждом индивидуальном задании на построение линии пересечения поверхностей задана монолитная (не полая) фигура, ограниченная комбинациями простейших поверхностей. В каждом задании необходимо построить несколько линий пересечения (минимум две). Для правильного и полного решения задачи ее следует расчленить на ряд элементарных составляющих, выделяя пары пересекающихся поверхностей. Для каждой пары поверхностей необходимо решить задачу отдельно, каждый раз строго выполняя все этапы.

Искомая линия пересечения есть объединение всех ее участков, построенных при решении элементарных задач.

Следует иметь в виду, что каждая из выделенных поверхностей существует лишь до линии ее пересечения с другой поверхностью. Поверхности не являются тонкостенными оболочками, а лишь ограничивают монолитную фигуру, не имеющую внутренних полостей.

### 2.4.2. Указания к решению задачи и выполнение построения

1. Анализ условия задачи:

а) определяем вид (название) пересекающихся поверхностей: (линейчатая, вращения, второго порядка и др.);

б) выделяем поверхности, занимающие проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций;

в) устанавливаем, какие простейшие линии могут быть проведены на каждой из пересекающихся поверхностей, как эти линии расположены и как они проецируются на каждую из плоскостей проекций;

г) выявляем особенности взаимного расположения пересекающихся поверхностей: взаимное положение их осей, наличие общей плоскости симметрии и ее положение относительно плоскостей проекций, наличие точек касания, общего плоского сечения для поверхностей второго порядка и т.п.

2. Определение типа задачи:

а) хотя бы одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций;

б) ни одна из пересекающихся поверхностей не занимает проецирующего положения относительно плоскостей проекций;

в) имеется возможность использовать теоремы о частных случаях пересечения поверхностей второго порядка.

3. Построение особых точек кривой пересечения, к которым, относятся:

а) точки с максимальным и минимальным значениями координат $x$, $y$ и $z$ - высшая, низшая, крайняя правая, крайняя левая, крайняя передняя, крайняя задняя;

б) точки, принадлежащие очеркам проекций поверхностей, точки перегиба кривой, среди которых точки - границы видимости кривой при проецировании на каждую плоскость проекций.

4. Построение промежуточных точек кривой пересечения.

5. Построение проекций кривой пересечения поверхностей, выделение видимых и невидимых участков линии пересечения.

6. Определение протяженности очерков проекций поверхностей и их видимости.

7. Обводка чертежа.

Решение задачи, когда хотя бы одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскостей проекций, базируется на следующих положениях:

Правило 1. Если хотя бы одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций, то на чертеже присутствует одна из проекций линии пересечения. Она принадлежит (совпадает) следу поверхности на эту плоскость проекций. Вторую проекцию этой линии строят из условия ее принадлежности другой, не проецирующей поверхности.

Если эта проекция линии пересечения представляет собой лекальную кривую, то задача сводится к построению недостающих проекций ряда точек, принадлежащих линии пересечения и соединению их плавной кривой линией.

Правило 2. Если обе пересекающиеся поверхности занимают проецирующее положение относительно разных плоскостей проекций, то на чертеже присутствуют обе проекции линии пересечения. Их надо лишь правильно указать (обозначить). Никаких построений в этом случае выполнять не требуется.

Правило 3. Если обе пересекающиеся поверхности занимают проецирующее положение относительно одной и той же плоскости проекций, то линия их пересечения есть прямая (несколько прямых), проецирующая по отношению к той же плоскости проекций.

Если ни одна из пересекающихся поверхностей не занимает проецирующего положения относительно плоскостей проекций, используем вспомогательные плоскости или сферы (концентрические или эксцентрические). Вспомогательную поверхность выберем таким образом, чтобы она пересекала исходные поверхности по возможно более простым и удобно расположённым относительно плоскостей проекций линиям для сокращения числа промежуточных построений и повышения их точности или чтобы линия пересечения вспомогательной поверхности с заданными проецировалась в виде простых линий (прямых или окружностей). Всегда следует избегать построения промежуточных лекальных кривых, если есть возможность получить на поверхности окружности и, особенно, прямые линии.

Рассмотрим решение задачи на примере (рис. 14). Необходимо построить линии пересечения поверхностей, отражающие характер, содержание и уровень сложности задач домашнего задания.

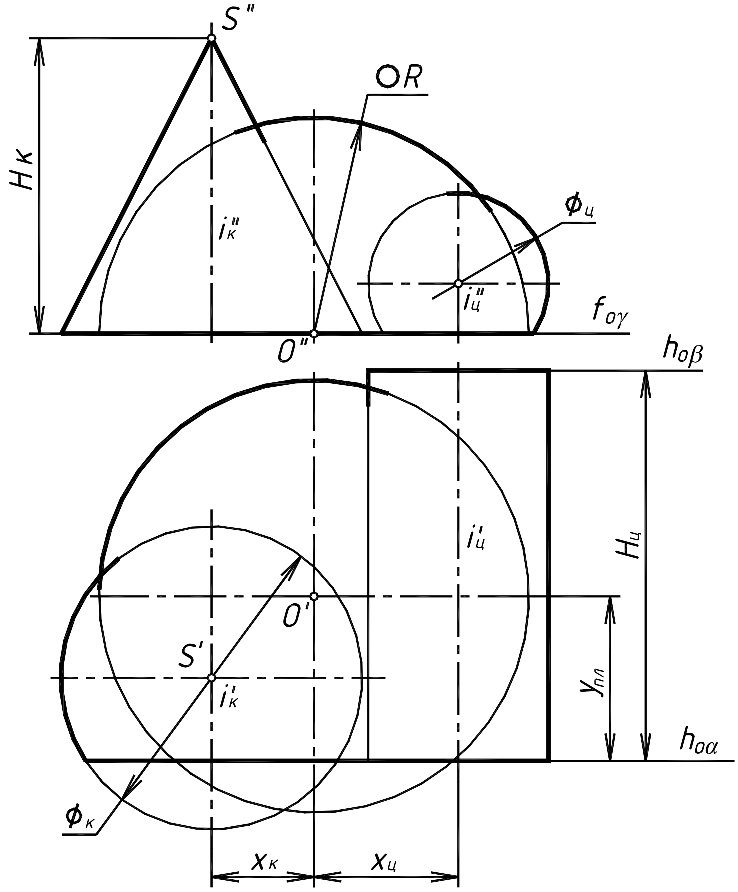


Рис.14

Общий анализ условия задачи говорит о том, что поверхность заданной фигуры ограничена сферой (*О*), поверхностью прямого кругового цилиндра (*Ц*), прямого кругового конуса (*К*), передней фронтальной плоскостью $\alpha$, задней фронтальной плоскостью $\beta$, горизонтальной плоскостью основания $\gamma$.

На поверхности фигуры надлежит построить линию пересечения, включающую следующие составляющие:

а) линию пересечения конической поверхности и фронтальной плоскости $\alpha$;

б) линию пересечения сферы и фронтальной плоскости $\alpha$;

в) линию пересечения цилиндрической поверхности и горизонтальной плоскости $\gamma$;

г) линию пересечения цилиндрической поверхности и сферы;

д) линию пересечения конической поверхности и сферы.

Решим последовательно эти задачи, начиная с тех случаев, в которых хотя бы одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций. Как известно, в этих случаях решение задачи значительно упрощается, так как нет необходимости использовать общий алгоритм, вводя вспомогательные поверхности.

<u>Пересечение конической поверхности и плоскости (рис. 15)</u>. Плоскость **α** перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций и параллельна фронтальной плоскости проекций, а также параллельна двум образующим конической поверхности. Линия пересечения - гипербола. Ее горизонтальная проекция - отрезок прямой, совпадающий с горизонтальным следом плоскости (см. правило 1). На фронтальную плоскость проекций гипербола проецируется без искажения.

Сначала находим характерные точки кривой пересечения. Высшей является точка *A*, как принадлежащая окружности конуса минимального радиуса. Левая низшая точка *B* принадлежит основанию конуса. Положение крайней правой точки определяется пересечением гиперболы с окружностью, являющейся пересечением сферы с плоскостью (точка *C*). Необходимо построить гиперболу с участком, уходящим левее точки *C* .

О пересечении сферы с плоскостью будет рассказано ниже.

Фронтальные проекции произвольно выбранных промежуточных точек гиперболы (показана лишь точка *1*) найдем по общему правилу о принадлежности точек поверхности. Коническая поверхность несет на себе семейство прямых линий - образующих, и окружностей - параллелей. Фронтальная проекция точки *1* найдена проведением через нее образующей.

Соединяя последовательно построенные точки *B"*, *1"*, *A"*, *C"*, получим фронтальную проекцию гиперболы.

На обе плоскости проекций гипербола проецируется как видимая.

<u>Пересечение сферы и плоскости (см. рис. 15)</u>. Сечение сферы плоскостью всегда дает окружность.

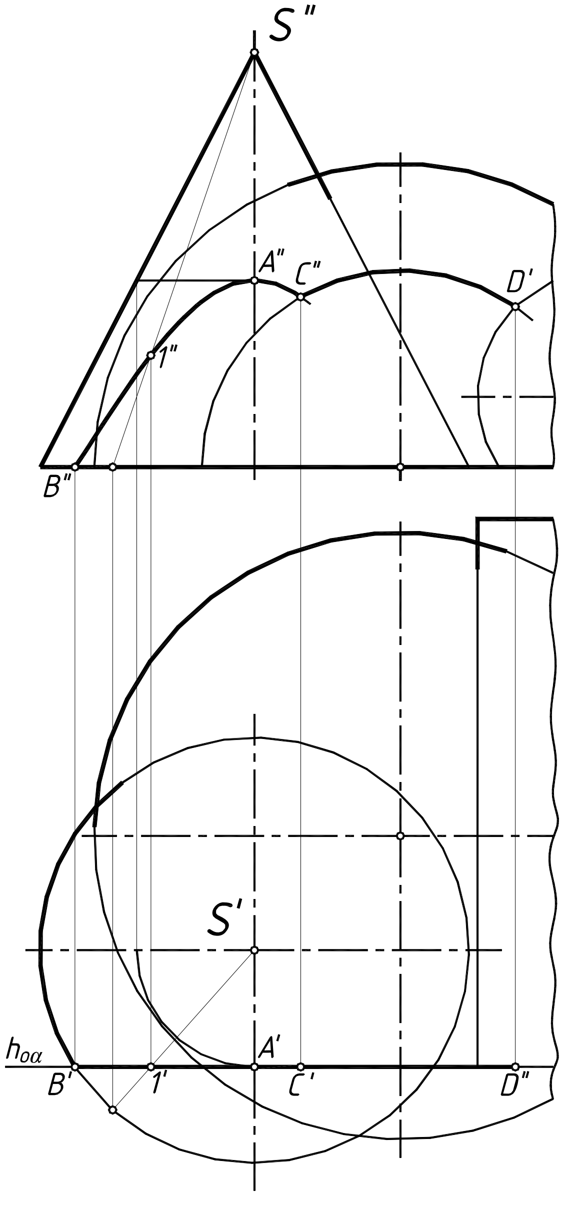


Рис.15

В приведенном примере сфера пересекается фронтальной плоскостью $\alpha$. Следовательно, на фронтальную плоскость проекций эта окружность проецируется без искажения, на горизонтальную - в отрезок прямой, принадлежащей горизонтальному следу секущей плоскости (плоскость, будучи фронтальной, перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций). Положение центра и величина радиуса этой окружности ясны из чертежа.

Обратите внимание: дуга окружности существует до тех пор пока сфера не пересекается с цилиндром справа (точка $D$), а с конусом слева - точка $C$ . О нахождении точки $C$ было сказано выше.

На обе плоскости проекций эта дуга проецируется как видимая.

<u>Пересечение цилиндрической поверхности и плоскости (рис.16).</u>

Обе пересекающиеся поверхности занимают фронтально проецирующее положение. Следовательно (согласно правилу 3), их пересечением являются две фронтальные проецирующие прямые. Фронтальные проекции этих прямых - точки пересечения окружности, в которую проецируется цилиндрическая поверхность и фронтального следа плоскости $f_{0\alpha}$.

Горизонтальные проекции прямых $l_1$ и $l_2$ находим по проекционной связи. Прямая $l_1$ существует от передней плоскости фигуры $\alpha$ до задней плоскости $\beta$, а прямая $l_2$ - лишь от задней плоскости $\beta$ до точки $F$ ее пересечения с окружностью основания сферы. Горизонтальные проекции прямых - невидимые.

Пересечением цилиндрической поверхности с передней плоскостью $\alpha$ иллюстрируется правило 2. Обе указанные поверхности проецирующие: цилиндрическая - фронтально проецирующая, плоскость $\alpha$ - горизонтально проецирующая. Следовательно, на чертеже присутствуют обе проекции линии пересечения: дуга окружности и отрезок прямой, и никаких дополнительных построений не требуется.

<u>Пересечение цилиндрической поверхности и сферы (см. рис.16).</u>

Цилиндрическая поверхность занимает фронтально проецирующее положение и проецируется на фронтальную плоскость проекций в окружность. Согласно правилу 1, фронтальной проекцией искомой линии пересечения является та часть окружности, являющейся проекцией цилиндрической поверхности на плоскость $\pi_2$ , которая находится в пределах фронтальной проекции сферы, т.е. дуга $F''G''$.

Линией пересечения в данном случае является кривая четвертого порядка (пересечение двух поверхностей второго порядка).

Рассмотрим характерные точки кривой пересечения. Наибольшую координату $z$ имеют точки $E_1$ и $E_2$ , наименьшую - точка $F$, принадлежащая плоскости основания фигуры. Крайняя правая - точка $G$ , крайняя левая - точка $H$. Точка $H$ является одновременно и точкой перегиба, и границей видимости горизонтальной проекции кривой, так как лежит на очерковой образующей горизонтальной проекции цилиндра.

Самая ближняя к наблюдателю точка $D$ принадлежит плоскости $\alpha$ - передней плоскости фигуры, самая дальняя - точка $F$ принадлежит окружности основания сферы.

Горизонтальные проекции точек, принадлежащих кривой пересечения, находим из условия, что они принадлежат непроецирующей поверхности сферы (проводим через точки на сфере окружности).

После построения горизонтальных проекций характерных точек кривой находим горизонтальные проекции промежуточных точек. На чертеже показано построение точек $2_1$ и $2_2$.

Соединяя горизонтальные проекции точек плавной кривой, следует иметь ввиду, что порядок построения точек, как правило, не соответствует последовательности их расположения на кривой. Объединение точек в кривую требует повышенного внимания, опоры на логику и пространственное представление.

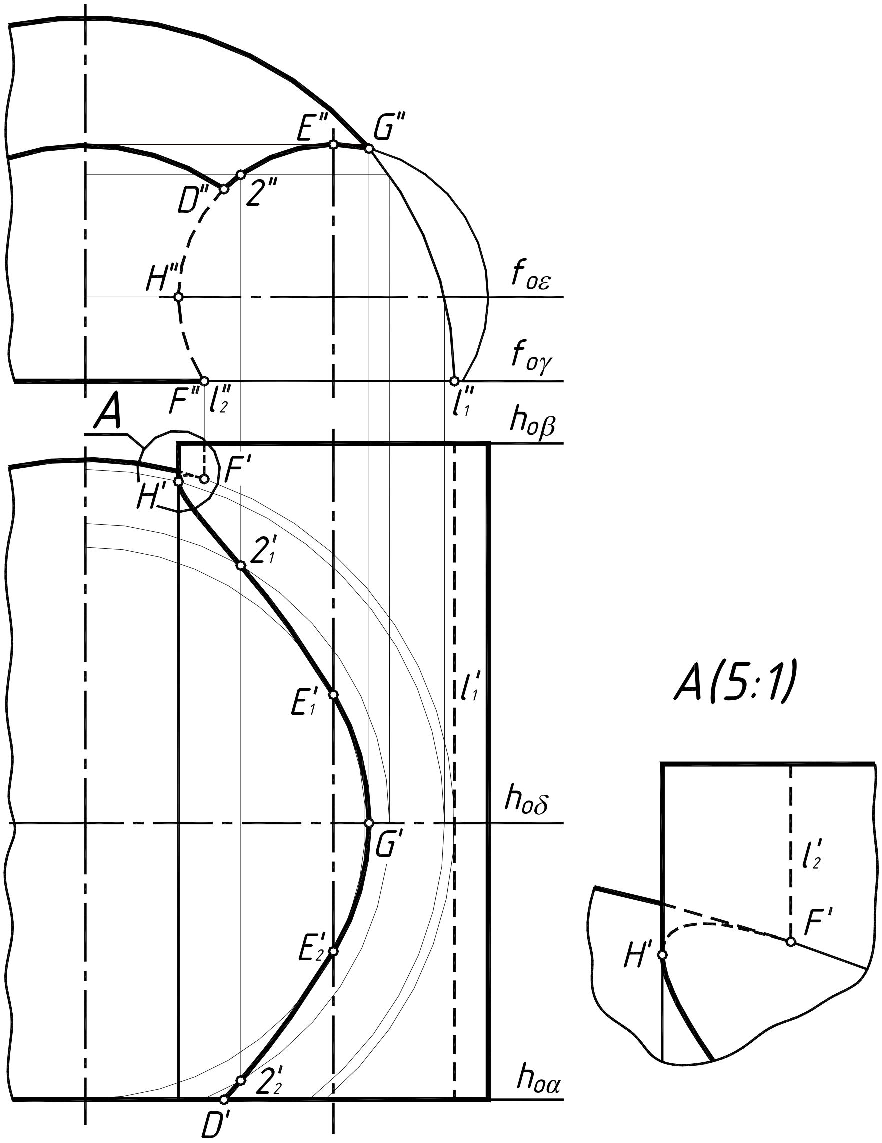


Рис.16

Следует обратить внимание на симметрию части кривой относительно плоскости $\delta$.

При проецировании на плоскость $\pi_1$ в данном случае часть кривой лежит ниже плоскости главного меридиана (плоскости $\varepsilon$) и оказывается невидимой (участок кривой $H'F'$).

Оформление очерков проекций поверхностей требует повышенного внимания. Так, левая очерковая образующая цилиндра существует от плоскости $\beta$ до точки $H$ - точки врезания в сферу. Далее точки $H$ по направлению к наблюдателю эта образующая не существует (тело рассматриваем как монолит, без внутренних полостей).

Окружность основания сферы, дающая очерк ее горизонтальной проекции, подходит к точке $F$ слева. В этой точке она пересеклась с цилиндром и прекратила свое существование. Так как горизонтальная очерковая образующая цилиндра, проходящая через точку $H$, лежит выше окружности основания сферы, часть горизонтальной проекции этой окружности оказывается невидимой.

Важно тщательно проработать этот участок линии пересечения, поэтому его целесообразно вынести отдельно и показать в увеличенном масштабе (см. рис. 16).

## Пересечение конической поверхности и сферы (рис.17)

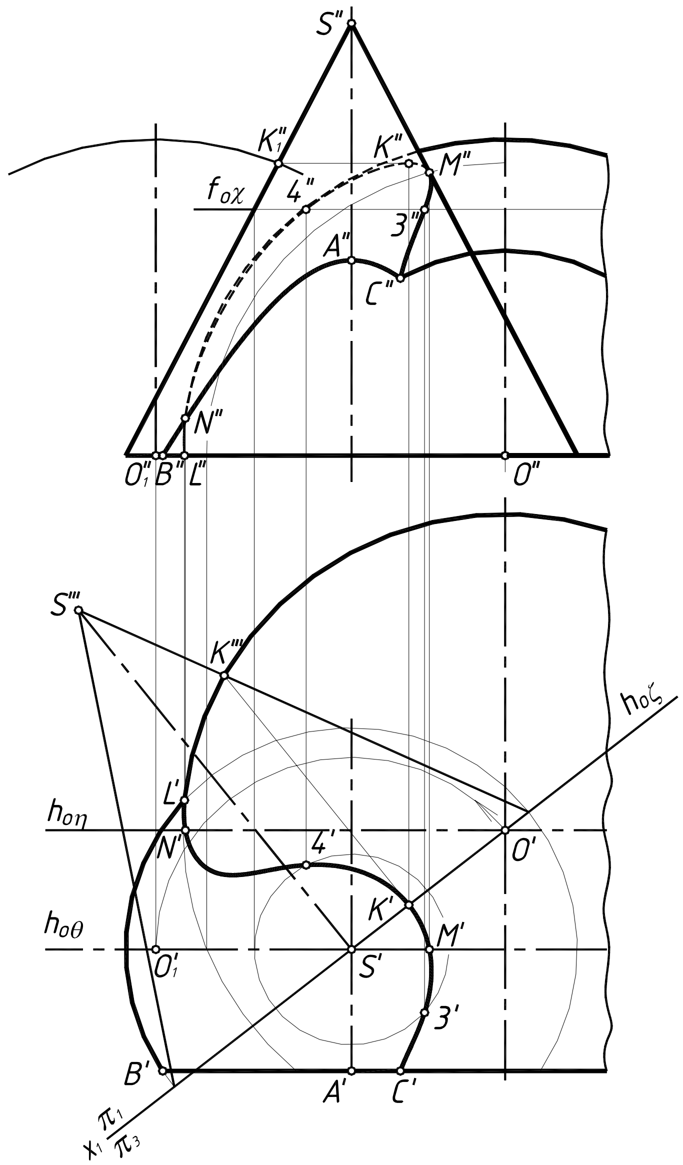


Рис.17

Ни одна из пересекающихся поверхностей не занимает проецирующего положения относительно какой-либо плоскости проекций. Обе поверхности являются поверхностями второго порядка, однако, ни под одну теорему о частном случае пересечения таких поверхностей она не подходит. Следовательно, решать задачу предстоит по общему алгоритму, используя поверхности-посредники.

Для решения данной задачи в качестве вспомогательных могут быть использованы:

а) горизонтально проецирующие плоскости, проходящие через вершину $S$ . Они будут пересекать коническую поверхность по прямым (образующим), а сферу - по окружностям, которые на горизонтальную плоскость проекций проецируются в отрезки прямых, а на фронтальную - в эллипсы;

б) горизонтальные плоскости, пересекающие и коническую поверхность и сферу по окружностям, которые будут проецироваться на плоскость $\pi_1$ без искажения;

в) концентрические сферы с центром в любой точке оси конуса, так как сферу можно рассматривать в качестве поверхности вращения с бесконечным числом осей (за ось сферы может быть принята любая прямая, проходящая через ее центр). Для возможности применения способа концентрических сфер, оси поверхностей должны иметь общую точку.

Сравнительный анализ возможных способов решения задачи приводит к выводу о том, что наиболее простое решение дает использование в качестве вспомогательных горизонтальных плоскостей. При использовании горизонтально проецирующих плоскостей, проходящих через вершину конуса $S$, придется дополнительно использовать способ преобразования чертежа, чтобы проекции окружности пересечения со сферой преобразовать из эллипсов в окружности. Применяя концентрические сферы, необходимо задавать две проекции этих сфер. Вспомогательные горизонтальные плоскости приведут к несложным построениям по нахождению горизонтальных, а затем и фронтальных проекций точек, принадлежащих линии пересечения.

Построения начинаем с нахождения характерных точек линии пересечения.

Правило 4. При пересечении поверхностей вращения высшая и низшая точки кривой пересечения лежат в плоскости их симметрии, содержащей оси обеих поверхностей.

В данном случае высшая точка $K$ искомой кривой лежит в плоскости $\zeta$, содержащей ось конуса и центр сферы. Плоскость $\zeta$ пересекает коническую поверхность по образующим, а сферу - по окружности, которая на фронтальную плоскость проекций проецируется в эллипс. Чтобы данная окружность проецировалась без искажения, используем способ замены плоскостей проекций.

Вводим новую ось проекций $x_1$, совпадающую с горизонтальным следом плоскости $\zeta$, и строим новую фронтальную проекцию. На пересечении образующей с окружностью находим точку $K$, а затем определяем ее положение на исходных плоскостях проекций.

Построение точки $K$ можно выполнить, используя вращение вокруг проецирующей оси (см. рис. 17). Вращение выполнено вокруг горизонтально проецирующей оси, совпадающей с осью конуса.

Низшая точка $L$ искомой кривой (в данной задаче) лежит на пересечении окружностей основания конуса и полусферы. Вторая симметричная ей относительно плоскости $\zeta$ точка в данном случае отсутствует, так как фигура, по условию, срезана плоскостью $\alpha$.

В данной задаче точка $L$ является и крайней левой, и самой дальней от наблюдателя. Ближайшая к наблюдателю точка $C$ кривой будет принадлежать плоскости среза фигуры $\alpha$, однако определить ее заранее точными построениями, так же как и крайнюю правую точку кривой, не удастся.

Так как обе пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения, при заданном расположении часть точек обеих поверхностей будет на фронтальной плоскости проекций невидимой. Границей видимости точек поверхности вращения является главный меридиан, в данном случае расположенный в плоскости $\theta$ для конуса и в плоскости $\eta$ для сферы. Плоскость $\theta$ находится ближе к наблюдателю, чем плоскость $\eta$. Следовательно, границей видимости кривой пересечения на фронтальной плоскости проекций будет точка $M$. В плоскости $\eta$ находится промежуточная точка $N$ кривой пересечения.

Для нахождения промежуточных точек кривой пересечения вводим вспомогательные горизонтальные плоскости (приведена одна плоскость $\chi$, которая пересекает обе поверхности по окружностям, на их пересечении находим точки *3* и *4*. Построения видны на чертеже.

На горизонтальной плоскости проекций кривая пересечения является видимой. О видимости кривой пересечения на фронтальной плоскости проекций говорилось выше.

На рис. 18 решение задачи представлено в окончательном виде.

Необходимо отметить, что на промежуточных консультациях студентам следует показывать все построения, выполненные в тонких линиях. Подписанная преподавателем работа может содержать лишь по одному построению, отражающему сущность примененного способа (построение точек *1*, *2*, *3*, *4*), и построение всех характерных точек.

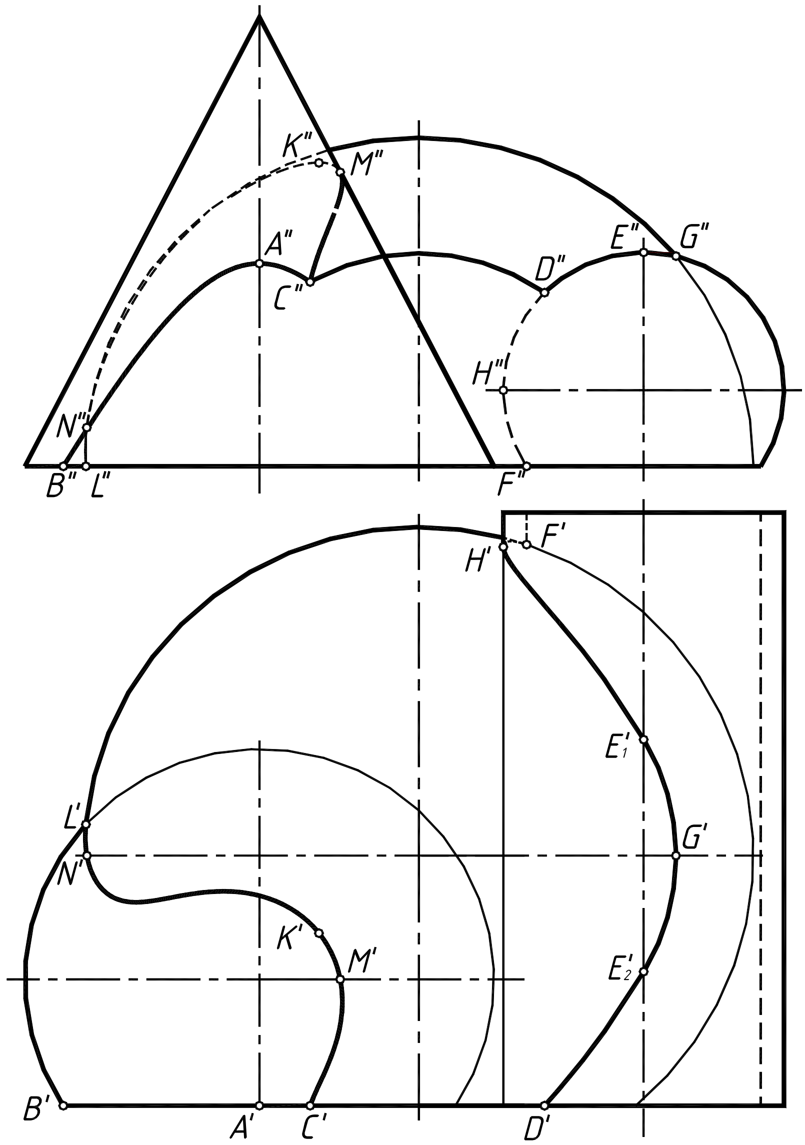


Рис.18

### 2.4.3. Применение вспомогательных сфер-посредников

Принцип использований вспомогательных сфер-посредников для нахождения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, такой же, как и при использовании плоскостей-посредников: находят линии пересечений сфер-посредников с каждой из пересекающихся поверхностей и на пересечении полученных линий определяют искомые точки.

Сферы-посредники применяют при пересечении поверхностей вращения между собой или с поверхностями, имеющими круговые сечения.

При пересечении поверхностей вращения, оси которых пересекаются (рис. 19), точку пересечения осей вращения выбирают в качестве центра сфер-посредников (концентрические сферы). В этом случае сферы, проведенные из этого центра, пересекают обе поверхности по окружностям, которые на одну из плоскостей проекций (в данном случае на фронтальную плоскость проекций) проецируются в отрезки пряных.

Сначала следует определить диапазон значений радиусов сфер-посредников. Минимальное значение радиуса определяется возможностью пересечения (касания) обеих поверхностей с введенной сферой. Минимальный радиус сферы, вписанной в цилиндрическую поверхность, равен отрезку $O''H''$, а в коническую поверхность – отрезку $O''G''$. Отрезок большей величины и является минимальным радиусом сферы-посредника. Максимальная величина радиуса сферы-посредника определяется расстоянием от центра сферы (точка $O$) до наиболее удаленной точки пересечения очерков пересекающихся поверхностей вращения (в данном случае - отрезок $O''A''$).

Построение точек, принадлежащих линии пересечения заданных поверхностей, и соединение их плавной кривой представлено на рис. 19.

При решении данной задачи мы строили фронтальную проекцию линии пересечения без использования горизонтальной проекции. Горизонтальную проекцию линии пересечения строим исходя из условия принадлежности построенной линии пересечений конической поверхности; проводим через точки на поверхности конуса окружности и находим их горизонтальные проекции.

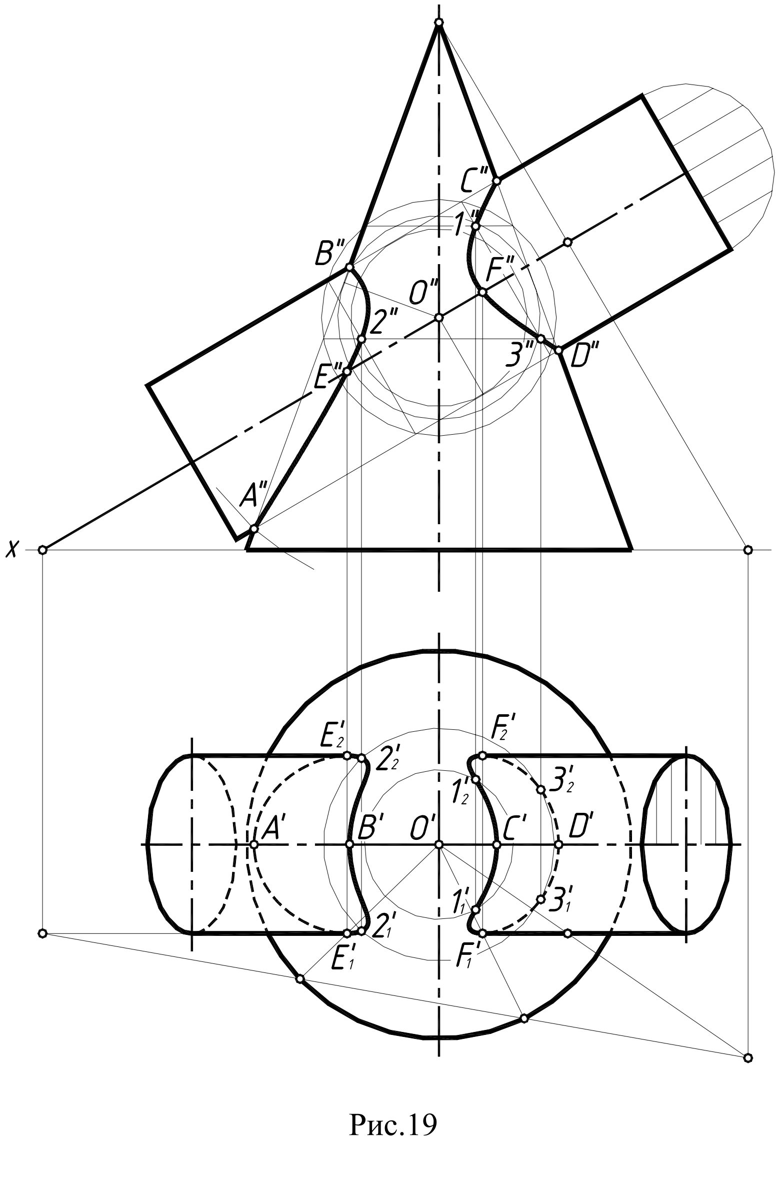


Рис.19

Надо обратить внимание на нахождение точек, являющихся границей видимости кривой пересечения на горизонтальной проекции. Эти точки расположены на горизонтальных очерковых цилиндра. Для нахождения указанных точек необходимо найти точки пересечения образующих цилиндра (прямых) с конической поверхностью. Эти построения рассмотрены в соответствующем разделе данного пособия, а на чертеже проведены без обозначений, чтобы не отвлекать внимание студентов.

На рис. 20 представлены пересекающиеся цилиндрическая поверхность (поверхность вращения) и коническая поверхность, имеющая круговые сечения (горизонтальными плоскостями). Обе поверхности имеют общую плоскость симметрии. Это дает возможность применять в качестве посредника сферические поверхности, проводимые из разных центров (эксцентрические сферы). Четыре точки ($A$, $B$, $D$, $E$), принадлежащие линии пересечения заданных поверхностей$_s$ получаем без дополнительных построений. Этими точками являются точки пересечения очерковых образующих поверхностей при проецировании на фронтальную плоскость проекций.

Для нахождения произвольных точек, принадлежащих линии пересечения, на поверхности конуса в интервале, где должна проходить линия пересечения, задаемся окружностью с центром в точке $C_1$ ($C_1''$). Через эту окружность можно провести множество сфер, центры которых расположены на перпендикуляре к плоскости заданной окружности, проходящем через точку $C_1$($C_1''$). Проведенный через точку $C_1$ ($C_1''$) перпендикуляр пересекает ось цилиндрической поверхности в точке $C_2$ ($C_2''$). Эту точку и нужно взять за центр сферы-посредника, так как в этом случае она будет пересекать цилиндрическую поверхность по окружности. Сферу надо провести и через окружность, которой мы задались на конической поверхности. Дальнейшие построения представлены на рис. 20. На конической поверхности можно задать еще несколько окружностей и использовать их для нахождения других точек, принадлежащих линии пересечения заданных поверхностей. Полученные точки соединяем плавной кривой линией.

При, построении линии пересечения, как и в предыдущем случае, мы использовали только фронтальную проекцию. Для построения горизонтальной проекции линии пересечения находим горизонтальные проекции полученных точек, исходя из условия, что они принадлежат окружностям, которыми мы задавались на конической поверхности. Строим горизонтальные проекции этих окружностей и на них находим горизонтальные проекции точек, принадлежащих линии пересечения.

Очерком конической поверхности на горизонтальной плоскости проекций является образующие, горизонтальные проекции которых касательны к окружностям оснований конуса. Необходимо построить горизонтальные проекции этих образующих (точными графическими построениями) и по точкам касания найти их фронтальные проекции. На пересечении фронтальных проекций этих образующих с кривой пересечения будут находиться точки, являющиеся границей видимости кривой на горизонтальной плоскости проекций.

Точные построения по нахождению точек пересечения прямых образующих конуса с поверхностью цилиндра даны в соответствующем разделе данного пособия.

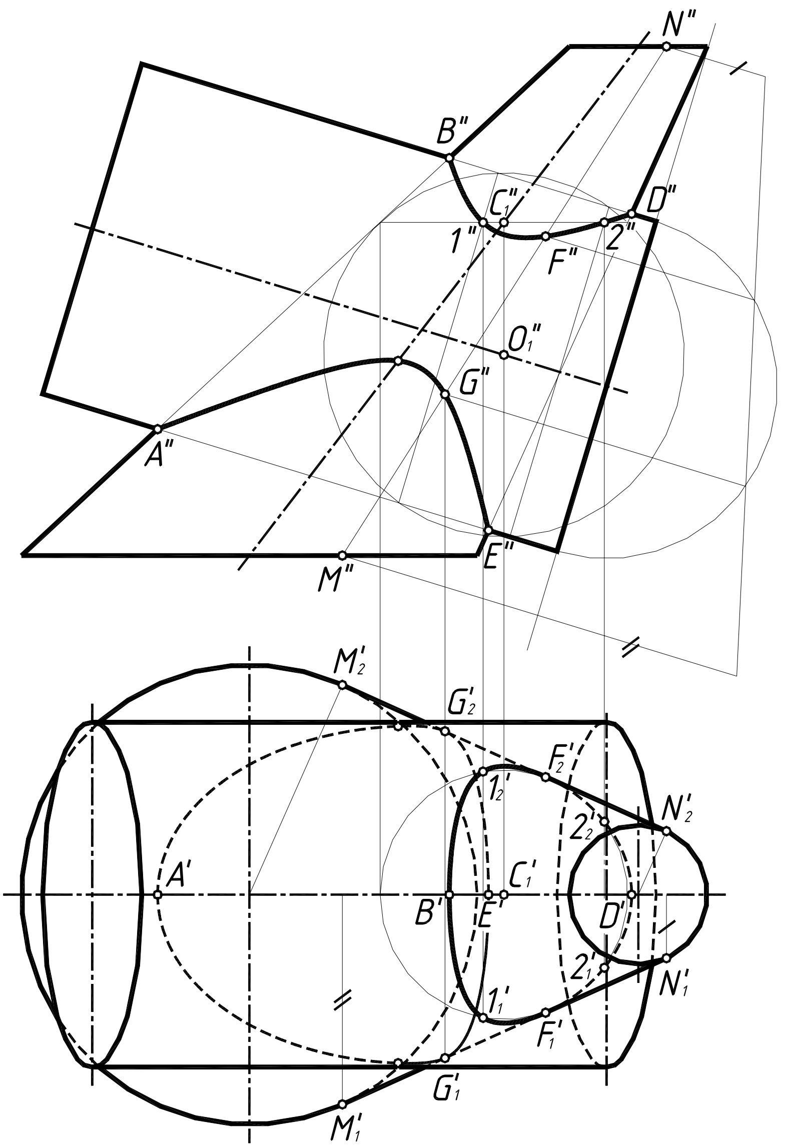


Рис.20

### 2.4.4. Вопросы для подготовки к защите

1. Какие поверхности пересекаются?
2. Какие из пересекающихся поверхностей занимают проецирующее положение, относительно какой плоскости проекций, как в этом случае находили линию пересечения?
3. Как найти линию пересечения поверхностей, когда ни одна из них не занимает проецирующего положения относительно какой-либо плоскости проекций?
4. Как выбирают плоскости-посредники?
5. В каких случаях в качестве посредника используют вспомогательные сферические поверхности?
6. Как определить порядок кривой пересечения поверхностей?
7. Какие кривые второго порядка получаются от пересечения плоскости с конической поверхностью?
8. Какие частные случаи пересечения поверхностей второго порядка вы знаете?
9. Как найти характерные точки линий пересечения поверхностей?

### 2.5. Точки пересечения прямой с поверхностью, касательные плоскости

#### 2.5.1. Подготовка к решению задачи

Перечислим фундаментальные положения начертательной геометрии, знание которых необходимо при решении данных задач:

- каким приемом пользуются в начертательной геометрии для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью;
- как выбрать плоскость-посредник;
- как построить линии пересечения плоскости с поверхностью;
- что такое касательная плоскость;
- что является элементом касания плоскости и поверхности;
- что такое нормаль к поверхности.

Опираясь на указанные знания, студент должен уметь выполнить на чертеже следующие действия:

- заключить прямую в плоскость;
- найти линию пересечения плоскости с поверхностью;
- провести прямую, касательную к кривой линии;
- восставить перпендикуляр к плоскости.

#### 2.5.2. Указания к решению задачи и выполнению построений

**Пересечение прямой с поверхностью**

При решении задач на нахождение точек пересечения прямой с поверхностью большое значение имеет положение заданных геометрических фигур относительно плоскостей проекций. Если одна из заданных геометрических фигур занимает проецирующее положение относительно какой-либо плоскости проекций, то решение задачи значительно упрощается.

Если поверхность проецирующая, а прямая занимает общее положение (рис. 21), то, используя проецирующую фигуру (цилиндрическую поверхность), находим горизонтальные проекции точек пересечения прямой с поверхностью ($A'$, $B'$). Теперь, исходя из принадлежности данных точек непроецирующей фигуре (прямой), находим фронтальные проекции точек ($A''$, $B''$).

Рассмотрим видимость прямой на проекциях. На горизонтальной проекции вся прямая является видимой, так как цилиндрическая поверхность проецируется в окружность. На фронтальной проекции прямая на участке от точки $A$ до точки $B$ и от $B$ до $C$ закрывается цилиндрической поверхностью.

На рис. 22 прямая занимает проецирующее положение относительно фронтальной плоскости проекций. Фронтальные проекции точек пересечения прямой с конической поверхностью находим, используя эту проецирующую прямую (A, B). Теперь, исходя из принадлежности точек $A$ и $B$ поверхности непроецирующей фигуры (конической поверхности), находим их горизонтальные проекции ($A''$, $B''$).

На горизонтальной проекции участок прямой от точки $A$ до точки $B$ закрывается конической поверхностью.

Для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью в общем случае в начертательной геометрии применяют особый прием. Он состоит в том, что прямую заключают во вспомогательную плоскость, находят линию ее пересечения с поверхностью и на пересечении полученной линии с заданной прямой находят искомые точки. Вспомогательную плоскость следует выбирать таким образом, чтобы линия пересечения ее с поверхностями проецировалась в виде простых линий (прямой или окружности).

Для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью прямого кругового конуса (рис. 23) прямую надо заключить во вспомогательную плоскость, проходящую через вершину конической поверхности. Такая плоскость общего положения будет пересекать коническую поверхность по образующим (прямым). Фактически эта плоскость уже задана (прямой *a* и точкой *S*).

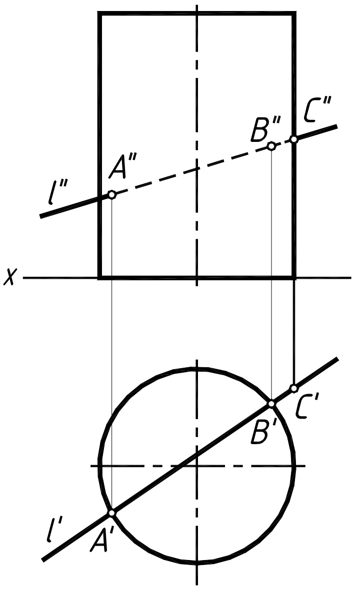


Рис.21

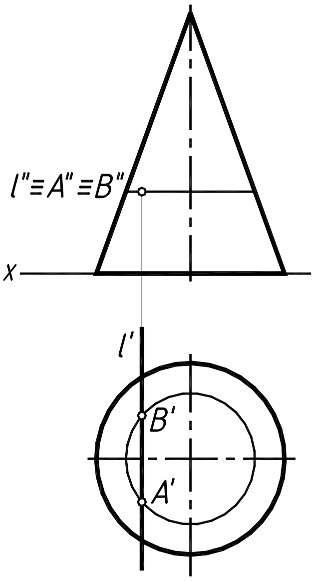


Рис.22

Для нахождения образующих, по которым вспомогательная плоскость пересекает коническую поверхность, надо найти точки ее пересечения с окружностью основания конуса. Окружность основания конуса принадлежит горизонтальной плоскости, которая перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. Мы снова пришли к случаю нахождения пересечения линии (окружности основания конуса) с плоскостью. Но окружность основания конуса принадлежит фронтально проецирующей плоскости, которую можно считать за новую вспомогательную. Следует определять прямую пересечения этой плоскости со старой вспомогательной (заданной пряной *a* и точкой *S*).

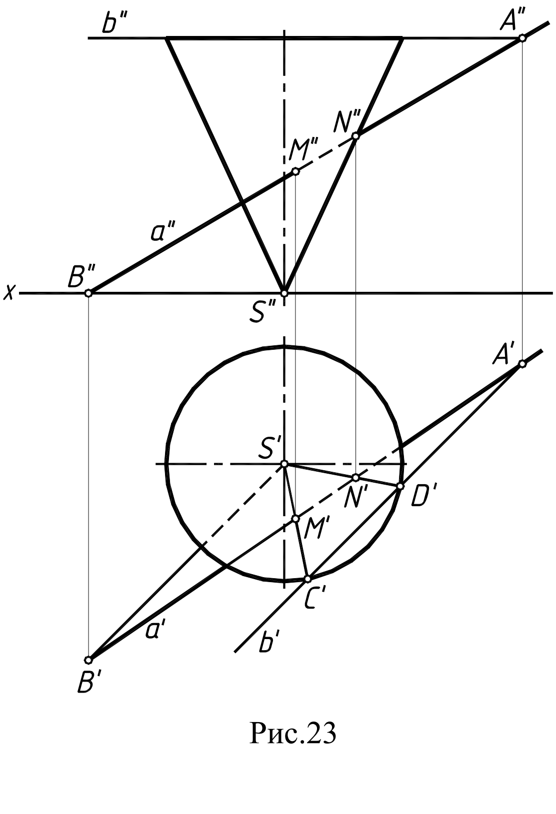


Рис.23

Для нахождения этой прямой можно найти две точки ей принадлежащие, или одну точку и  направление прямой. В первом случае можно найти две точки пересечения двух прямых, принадлежащих вспомогательной плоскости, с плоскостью, которой принадлежит окружность основания конуса. Этот прием мы использовали ранее (см. рис. 19).  Во втором случае достаточно найти одну такую точку ( в нашем  случае- точку *A*). Теперь определим направление искомой прямой. Так как она параллельна горизонтальной плоскости проекций, она будет параллельна любой горизонтали вспомогательной плоскости (в частности, горизонтали *BS*). Проводим проекции прямой *b*, параллельной прямой *BS* и находим точки пересечения вспомогательной плоскости с окружностью основания конуса (точки *C* и  *D*).

Вспомогательная плоскость пересекает коническую поверхность по образующим *SC* и *SD*.  Эти образующие пересекаются с заданной прямой *a* в  точках *M* и *N*.

Видимость прямой *a*  на проекциях показана на рис.23. При нахождении точек пересечения прямой с цилиндрической поверхностью (рис. 24) вспомогательная плоскость должна быть параллельна образующим цилиндрической поверхности.

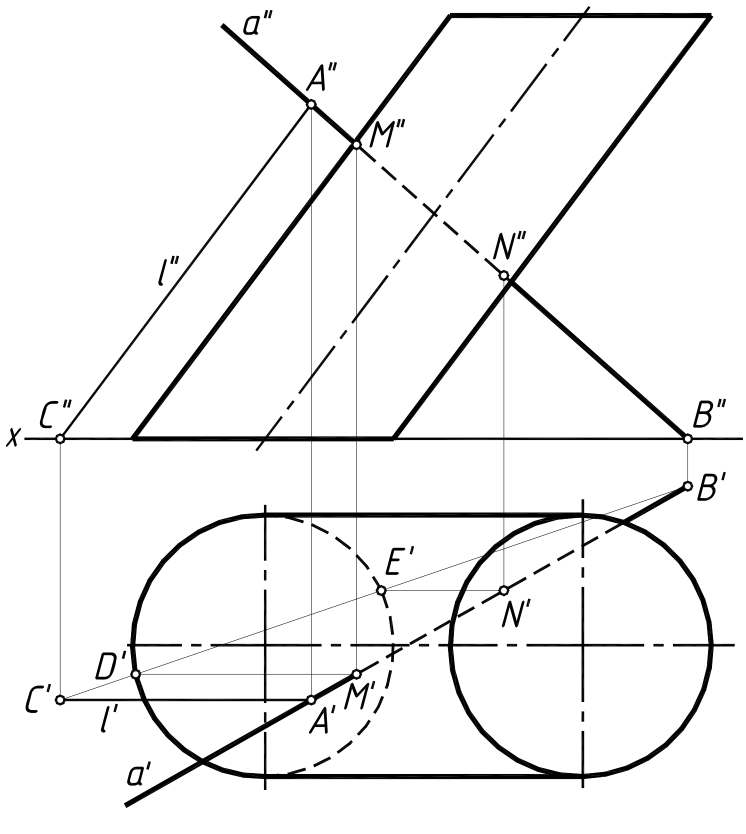


Рис.24

Это достигается тем, что  она содержит прямую (*l*), параллельную образующим цилиндрической поверхности. Таким образом, вспомогательная плоскость определена заданной прямой  *a*   и  пересекающейся с ней прямой *l* . Теперь надо найти пересечение этой плоскости с окружностью одного из оснований цилиндрической поверхности. В данном примере найдена прямая (*B C*), по которой вспомогательная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью проекций, которой принадлежит окружность одного из оснований цилиндрической  поверхности. Точки *D* и *C* - точки пересечения вспомогательной плоскости с окружностью основания цилиндрической поверхности. Через эти точки проходят образующие, по которым вспомогательная плоскость пересекает цилиндрическую поверхность. Точки *M* и *N* - искомые точки пересечения.

Видимость прямой *a* на проекциях показана на рис. 24.

На рис. 25 прямая *a* пересекается с поверхностью закрытого тора.

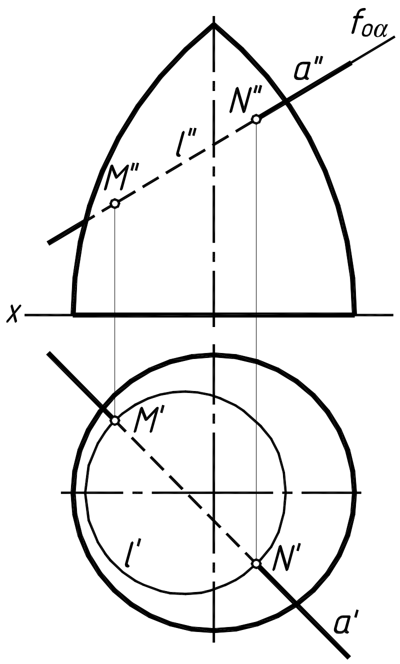


Рис.25

К сожалению, прямую *a* нельзя заключить во вспомогательную плоскость, которая пересекала бы поверхность тора по простой линии. Заключаем прямую *a* во фронтально проецирующую плоскость $\alpha$, которая пересекает поверхность тора по кривой. На пересечении этой кривой с прямой *a* находим искомые точки пересечения *M* и *N*. Видимость прямой *a* на проекциях показана на рис 25.

**Проведение касательной плоскости и нормали к поверхности**

Касательной к поверхности в некоторой точке называется плоскость, которой принадлежат все прямые, касательные к всевозможным кривым, проходящим на поверхности через эту точку.

Элементом касания плоскости с поверхностью может быть точка или прямая. Касательная плоскость может и пересекать поверхность по кривой. Плоскость касается линейчатых поверхностей по прямым (образующим).

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в данной точке.

Для конической поверхности (рис. 26) элементом касания плоскости, проходящей через точку *A*, является образующая а (*SA*). Другой прямой, вместе с прямой *a* задающей касательную плоскость, будет прямая *b* , касательная к окружности, проходящей на поверхности через точку *A*.

Через точку *A* проводим прямую (нормаль), перпендикулярную касательной плоскости, заданной прямыми *a* и *b* , зная, что ее горизонтальная проекция перпендикулярна горизонтальной проекции произвольной горизонтали плоскости (*b*), а фронтальная проекция перпендикулярна фронтальной проекции произвольной фронтали плоскости (*S'' B''*).

Элементом касания плоскости и закрытого тора (рис. 27) является точка. Для построения касательной плоскости на поверхности тора можно провести две окружности, касательные к которым и будут задавать искомую плоскость.

Одной из окружностей является параллель, принадлежащая плоскости, перпендикулярной оси вращения. Вторая окружность принадлежит меридиональной плоскости.

Касательной к первой окружности, проходящей через точку *A*, является прямая *a*, касательной ко второй окружности - прямая *b*.

Построить касательную *a* не составляет труда, так как окружность (параллель) проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения.

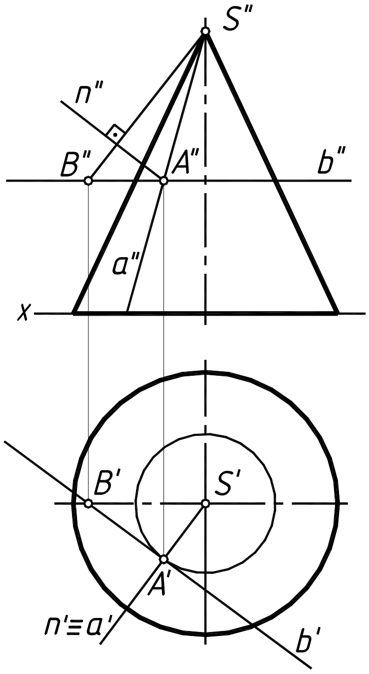


Рис.26

Меридиональная плоскость является проецирующей относительно горизонтальной плоскости проекций. Окружность (дуга окружности), являющаяся меридианом и принадлежащая этой плоскости, проецируется на фронтальную плоскость проекций в виде участка эллипса. Для построения касательной следует использовать способ преобразования чертежа и повернуть меридиональную плоскость вокруг оси тора до положения, когда эта плоскость станет параллельной фронтальной плоскости проекций (займет положение плоскости главного меридиана). Точка *A* переместится в положение $A_1$. Окружность будет проецироваться без искажения, и к ней можно провести касательную (фронтальная проекции $A''_1$ $B''_1$) перпендикулярно радиусу окружности, проходящему через ее центр - точку *C*. Касательная пересекает ось

вращения в точке *B*, которая при проводимом преобразовании чертежа оставалась на месте. Через нее проводим горизонтальную проекцию прямой *b*. Пересекающиеся прямые *a* и *b* задают искомую касательную плоскость.

Нормаль к поверхности проводим через точку *A* перпендикулярно касательной плоскости, как и в предыдущем случае.

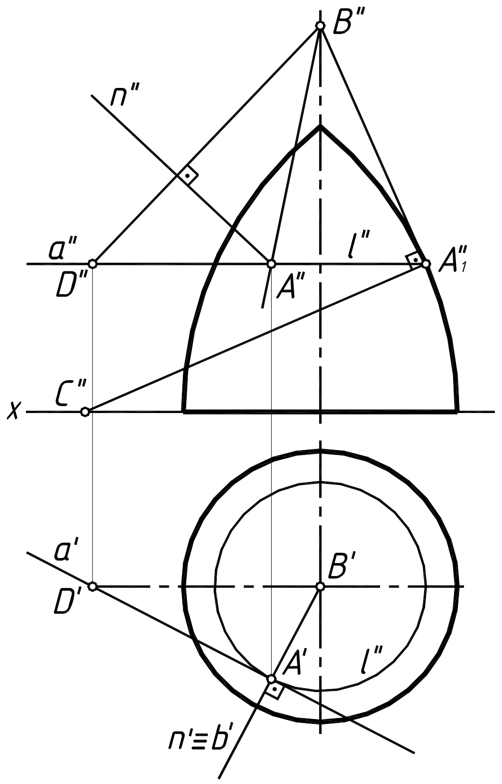


Рис.27

### 2.5.3. Вопросы для подготовки к защите

1. С какой поверхностью пересекается прямая?
2. В какую плоскость заключена прямая для нахождения ее пересечения с поверхностью?
3. Почему выбрана именно такая плоскость?
4. Как находили пересечение вспомогательной плоскости с поверхностью?
5. Что такое касательная плоскость?
6. Что является элементом касания плоскости с поверхностью?
7. Что такое нормаль к поверхности?
8. Как строили проекции нормали к поверхности?

## 2.6. Построение проекций трехмерных геометрических фигур

### 2.6.1. Подготовка к решению задачи

Необходимо знать следующие фундаментальные положения начертательной геометрии:

- инвариантные свойства ортогонального проецирования;
- признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости и двух плоскостей;
- множества в пространстве, обладающие общими свойствами;
- проецирование прямых, параллельных или перпендикулярных заданной плоскости;
- проецирование плоскости, параллельной уже заданной;
- нахождение точек пересечения прямой с плоскостью;
- определение видимости геометрических элементов на изображениях.

Опираясь на указанные знания, студент должен уметь выполнить на чертеже следующие действия:

- провести через точку плоскость, перпендикулярную заданной прямой;
- провести через точку плоскость, параллельную другой плоскости;

- найти точку пересечения прямой с плоскостью;
- определить длину отрезка прямой;
- на прямой отложить отрезок заданной длины;
- провести прямую, перпендикулярную заданной плоскости;
- определить видимость геометрических элементов на их изображениях с помощью конкурирующих точек.

### 2.6.2. Рекомендации к решению задачи и выполнению построений

Выполнение задач данного типа необходимо начать с составления алгоритма (плана) их решения, а затем реализовывать его на чертеже. Задачи решают без преобразования чертежа.

В задаче вариантов 1 - 10 необходимо построить пирамиду *SABC* при условии, что ее высота равна 80 мм, а вершина *S* принадлежит прямой *LN*. Из условия задачи видно, что вершина *S* отстоит от плоскости основания *ABC* на 80 мм и принадлежит прямой *LN*. Множеством точек, удаленных от плоскости на заданном расстояний, является плоскость, параллельная данной и отстоящая от нее на заданном расстоянии. Таких плоскостей можно провести две. Составляем алгоритм решения задачи:

а) провести плоскость, параллельную основанию *ABC* и отстоящую от нее на расстоянии 80 мм (одну из плоскостей);

б) найти пересечение проведенной плоскости с прямой *LN* (это и будет вершина *S*).

Расстояние между параллельными плоскостями определяют величиной перпендикуляра, опущенного из одной плоскости на другую.

Теперь имеем возможность составить план реализаций алгоритма решения задачи на чертеже:

а) из произвольной точки основания *ABC* проводим перпендикуляр заданной длины (80 мм);

б) через точку, принадлежащую проведенному перпендикуляру и отстоящую от основания *ABC* на 80 мм, проводим плоскость, параллельную основанию *ABC*;

в) находим пересечение прямой *LN* с этой плоскостью (находим вершину *S*);

г) проводим проекций ребер пирамиды (*SA*, *SB*, *SC*);

д) ребра, не видимые на соответствующих проекциях, показываем штриховыми линиями.

Чтобы восставить перпендикуляр заданной длины к плоскости (рис. 28), необходимо в плоскости основания *ABC* провести горизонталь (*A1*) и фронталь (*C2*). Горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (*A'1'*), а фронтальная проекция - перпендикулярна фронтальной проекции фронтали (*C"2"*). Ограничиваем перпендикуляр произвольной точкой *M*. Находим истинную величину ограниченного отрезка (*AM*) с помощью прямоугольного треугольника (см. рис. 4). На этой истинной величине (*A" M*) от точки *A"* откладываем отрезок, равный 80 мм (*A"S*). Теперь точка *S* делит отрезок *A M* (на чертеже *A" M*) в каком-то отношении. Следовательно, проекции точки *S* (*S'* и *S"* ) будут делить проекции отрезков (*A'M'*) и (*A" M"*) в том же отношении. Проводим *SS"* параллельно *MM"* и получаем фронтальную проекцию точки *S* (*S"*). На вертикальной линии связи находим горизонтальную проекцию точки *S* (*S'*). Нахождение точек пересечения прямой с плоскостью представлено на рис. 2.

В задаче вариантов 11 - 20 необходимо построить призму основанием в виде равнобедренного треугольника *ABC* и высотой 70 мм. Сторона *BC* основания задана, а точка *A* принадлежит прямой *EF* . Следовательно, точка *A* равноудалена от точек *B* и *C*.

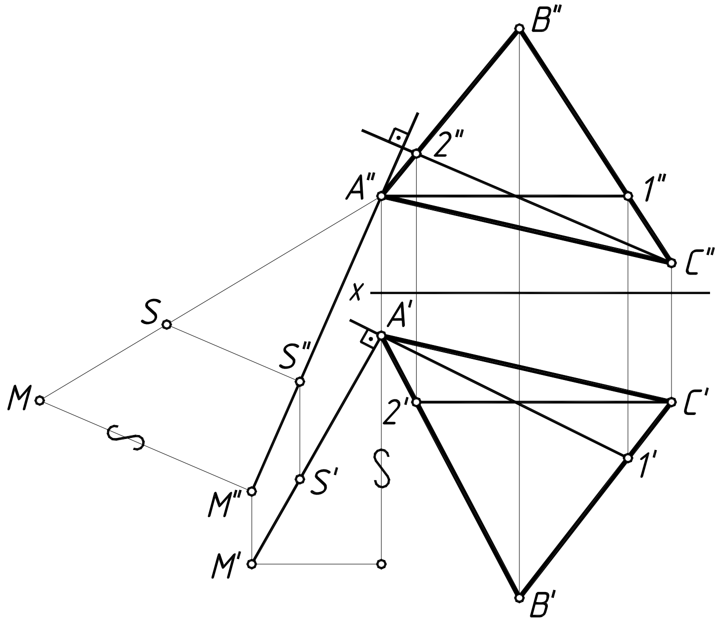


Рис.28

Алгоритм решения:

а) на прямой $EF$ найти точку, равноудаленную от точек $B$ и $C$;

б) построить одно из боковых ребер длиной 70 мм;

в) построить второе основание призмы и оставшиеся ребра;

г) обратить внимание на видимость ребер на проекциях.

Теперь перейдем к реализации этого алгоритма на чертеже;

а) находим середину отрезка $BC$;

б) через эту середину проводим плоскость, перпендикулярную прямой $BC$ (решение см. на рис. 2);

в) находим пересечение проведенной плоскости с прямой $EF$ (см. рис. 2);

г) из одной из вершин треугольника основания восстанавливаем перпендикуляр длиной 70 мм (см. рис. 28);

д) строим второе основание($A_1B_1C_1$) призмы из условия, что $AB \| A_1B_1$ , $BC \| B_1C_1$ и $AC \| A_1C_1$ , и, соответственно равны между собой по величине;

е) строим остальные ребра;

ж) ребра, не видимые на соответствующих проекциях, показываем штриховыми линиями.

В задаче вариантов 21 - 30 необходимо построить куб с основанием $ABC$ при условии, что вершина $B$ принадлежит прямой $LN$ а сторона $AB$ - прямой $AK$.

Алгоритм решения задачи:

а) из точки $A$ восставить перпендикуляр, пересекающий в точке $B$ прямую $LN$;

б) на прямой $AK$ от точки $A$ отложить сторону $AD$ , равную $AB$;

в) построить стороны $BC$ и $AD$ основания куба;

г) провести из вершин основания куба ребра;

д) построить второе основание куба;

е) обратить внимание на видимость ребер куба на проекциях.

Перейдем к реализации алгоритма решения задачи на чертеже:

а) так как сторона $AB$ основания куба перпендикулярна $AD$, она принадлежит плоскости, проходящей через точку *A* и перпендикулярной прямой *AK*. Через точку *A* проводим плоскость перпендикулярно прямой *AK* (см. рис. 2);

б) находим пересечение проведенной плоскости с прямой *LN* (см. рис. 2). Это точка *B*;

в) находим истинную величину отрезка [*AB*] (см. рис. 4);

г) на прямой *AK* от точки *A* откладываем отрезок, равный по величине *AB* (см. рис. 28);

д) находим вершину *C*, проводя прямые *BC* и *DC* параллельно *AD* и *AB* соответственно;

е) из одной из вершин основания куба восстанавливаем перпендикуляр длиной, равной ребру куба (см. рис. 28);

ж) строим основание куба $A_1B_1C_1D_1$ параллельно основанию *ABCD* ;

з) проводим остальные ребра куба;

и) ребра, не видимые на соответствующих проекциях, показываем штриховыми линиями.

### 2.6.3. Вопросы для подготовки к защите

1. Каков план решения задачи в пространстве (алгоритм решения)?
2. Как реализовывали этот план на чертеже?
3. Чем задана плоскость, проходящая через точку и перпендикулярная заданной прямой?
4. Чем задана плоскость, проходящая через точку и параллельная заданной плоскости?
5. Каким приемом пользуются в начертательной геометрии для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью?
6. На каком инвариантном свойстве ортогонального проецирования основано построение проекций отрезка заданной длины и принадлежащего заданной прямой?
7. Что такое конкурирующие точки?

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## П1. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК, ОБЛАДАЮЩИХ ОБЩИМИ СВОЙСТВАМИ (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА)

Геометрическим местом называется совокупность всех точек плоскости или пространства, обладающих данным свойством.

### П1.1. Геометрические места на плоскости

1. Множеством точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, является окружность.
2. Множеством точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек, является перпендикуляр к отрезку прямой, соединяющему заданные точки и проходящий через его середину.
3. Множеством точек плоскости, равноудаленных от трех заданных точек, является центр окружности, проведенной через эти точки.
4. Множеством точек плоскости, равноудаленных от заданной прямой, являются две параллельные прямые.
5. Множеством точек плоскости, равноудаленных от пересекающихся прямых, является биссектриса угла, образованного этими прямыми.
6. Множеством точек плоскости, равноудаленных от заданной окружности, являются две концентрические окружности с центром, совпадающим с центром заданной окружности.
7. Множеством на плоскости вершин прямых углов, стороны которых проходят через две заданные точки, является окружность, проведенная через эти точки, центр которой лежит на середине отрезка , соединяющего заданные точки.

### П1.2. Геометрические места в пространстве

1. Множеством точек пространства, равноудаленных от заданной точки, является сфера.
2. Множеством точек пространства, равноудаленных от двух заданных точек, является плоскость, перпендикулярная отрезку прямой, соединяющему заданные точки, и проходящая через его середину.
3. Множеством точек пространства, равноудаленных от трех заданных точек, является прямая, перпендикулярная плоскости, заданной этими точками, и проведенная через центр окружности, проходящей через заданные точки.
4. Множеством точек пространства, равноудаленных от заданной прямой, является прямая круговая цилиндрическая поверхность с осью, совпадающей с заданной прямой.
5. Множеством точек пространства, равноудаленных от заданной плоскости, являются две параллельные плоскости.
6. Множеством точек пространства, равноудаленных от пересекающихся прямых,, является плоскость, проходящая через биссектрису угла, образованного этими прямыми, и перпендикулярная плоскости заданных пересекающихся прямых.
7. Множеством точек пространства, равноудаленных от заданной окружности, является перпендикуляр к плоскости окружности, проходящий через центр этой окружности.
8. Множеством прямых, проходящих через заданную точку и составляющих с заданной прямой угол 90°, является плоскость, проходящая через эту точку и перпендикулярная заданной прямой.

9. Множеством в пространстве вершин прямых углов, стороны которых проходят через две заданные точки, является сфера, проведенная через эти точки, центр которой лежит на середине отрезка, соединяющего заданные точки.

10. Множеством точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых является плоскость, перпендикулярная плоскости заданных прямых и проходящая через прямую, параллельную заданным прямым и расположенную посередине между ними.

## П2. ПРИЗНАКИ ВЗАИМНОГО ПОЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

1. Прямая параллельна плоскости, если плоскость содержит прямую, ей параллельную.
2. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости.
3. Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, принадлежащим второй плоскости.
4. Две плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную второй плоскости.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М., 1983.
2. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии. М., 1986.

## ОГЛАВЛЕНИЕ