Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Б.Г. Жирных, В.И. Серегин, Ю.Э. Шарикян

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Допущено Научно-методическим советом вузов по начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графике при Министерстве образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров, магистров и специалистов высшего профессионального образования по машиностроительным и технологическим специальностям

Под общей редакцией В.И. Серегина

Москва

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

2015

УДК 515(075)

Разработано в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом ВПО третьего поколения для направления подготовки бакалавров, магистров и специалистов высшего профессионального образования: конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств на основе примерной программы дисциплины «Начертательная геометрия»

Рецензент: Заслуженный работник высшей школы РФ,
Почетный авиастроитель,
Заслуженный деятель науки и техники РФ
профессор, д.т.н., В.И.Якунин

Работа подготовлена на кафедре «Инженерная графика» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Жирных Борис Георгиевич, Серёгин Вячеслав Иванович, Шарикян Юрий Этумович
Начертательная геометрия: учебник. / Под общ. ред. В.И.Серегина – 1-е изд. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. – 168 с.: ил.

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по техническим направлениям подготовки (квалификация «бакалавр», «магистр» и «специалист») и полностью соответствует программе курса начертательной геометрии, читаемого в МГТУ им. Н.Э Баумана.

В учебнике изложен материал по классическим основам начертательной геометрии, дано подробное изложение теории построения обратимых изображений трехмерного пространства —основных геометрических фигур, способов преобразования, способов решения позиционных и метрических задач.

В конце каждого параграфа приводятся вопросы для самопроверки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является одной из учебных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях.

Она изучает и обосновывает способы изображений пространственных форм (линий, поверхностей, тел) на плоскости и способы решений задач геометрического характера по заданным изображениям указанных форм.

В жизни различные изображения нас окружают повсюду. Это плакаты и фотографии, рекламы и вывески перед магазинами, кадры кинофильмов и т.д. Но нас будут интересовать изображения предметов, которые в дальнейшем надо изготовить на производстве. При этом такие изображения будет выполнять один человек, а изготавливать по ним предмет на производстве другой. Следовательно, и тот и другой должны не только видеть формы трёхмерного предмета по его двухмерному изображению, но и иметь возможность решать геометрические задачи по определению размеров предмета и его отдельных частей, а также определять взаимное положение отдельных элементов предмета. Правила и приёмы начертательной геометрии дают возможность это сделать.

Решение многих технических задач можно производить аналитически и графически, при этом всегда надо выбирать наиболее целесообразный метод решения. Многие задачи решаются графически быстрее и проще, чем аналитически. Применению графических методов решения задач помогает начертательная геометрия.

Курс начертательной геометрии студенты высших технических учебных заведений изучают на первом семестре первого курса. Пришедшие из средней школы первокурсники ещё не привыкли к требованиям высшей школы, контролю со стороны преподавателя. Ведь по Положению о высшей школе преподаватель не обучает студентов, а лишь помогает им в приобретении знаний.

Для успешного освоения начертательной геометрии студенты должны иметь достаточные знания в области стереометрии. Ещё в средней школе ими должны быть усвоены основные сведения, относящиеся к взаимному положению прямых в пространстве, относительному положению прямой и плоскости, двух плоскостей, определению величины углов между прямой и плоскостью и двумя плоскостями.

Начертательная геометрия является для студентов новой дисциплиной по сравнению с изучаемыми в средней школе. Здесь вводится большое количество новых понятий, условностей, обозначений.

Среди предметов, изучаемых в техническом вузе, особое значение имеет прикладное техническое черчение. Оно является одним из способов выражения инженерной мысли в графической форме. Чтобы овладеть языком технического черчения, необходимо в первую очередь изучить правила («азбуку» и «грамматику») составления и чтения изображений.

«Азбука» чертежа — все те типы линий, которые применяются при его выполнении (сплошная, штриховая, штрихпунктирная и т.д.) и которые студенты изучают в курсе машиностроительного черчения. «Грамматикой» черчения является начертательная геометрия, которая изучает способы изображения объёмных тел, имеющих три измерения (длину, ширину и высоту) на плоскости, у которой всего лишь два измерения (длина и ширина).

Таким образом, предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование способов изображения пространственных форм (линий, поверхностей, тел) на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм.

Из определения становится ясным значение начертательной геометрии — она разрабатывает теоретические основы черчения. Изображения, построенные по правилам, изучаемым в курсе начертательной геометрии, позволяют мысленно представить формы предметов, их взаимное расположение в пространстве, определить размеры, исследовать геометрические свойства.

Изучая начертательную геометрию, студенты знакомятся с методами графического решения задач. Эти методы, хотя и обладают меньшей точностью по сравнению с аналитическими, могут с успехом применяться, в частности, при решении задач с использованием ЭВМ. Это ещё более повышает роль начертательной геометрии в инженерном образовании.

Однако, значение начертательной геометрии не ограничивается перечисленными факторами. Для будущего инженера, особенно инженера-конструктора, чрезвычайно важно пространственное мышление, пространственное воображение. Начертательная геометрия, вызывая усиленную работу пространственного воображения, развивает его.

Большинство задач, решаемых студентами в курсе начертательной геометрии, не встретятся им в будущей инженерной деятельности, но помогут столь необходимому инженеру развитию пространственного мышления и воображения. Начертательная геометрия необходима широкому кругу специалистов: инженерам-конструкторам машин и аппаратов, строителям различных сооружений, архитекторам, топографам и т.д.

Перед начертательной геометрией ставятся следующие задачи:

1) научить достаточно точно строить изображения предметов;

2) научить читать изображения, т. е. по изображению предметов представлять их в пространстве;

3) научить с помощью изображений решать задачи геометрического характера на определение формы, положения и размеров предмета;

4) развить у студентов пространственное мышление, т. е. научить их быстро и отчетливо представлять в уме пространственные формы (без чего невозможно проектирование и конструирование).

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Начертательная геометрия, основная задача которой состоит в изучении методов изображения пространственных фигур на плоскости, возникла из практических потребностей человека. Запросы точного естествознания, техники, промышленности и искусства способствовали развитию этой науки.

Ещё в глубокой древности было установлено, что основой для построения изображений, отвечающих определённым условиям, является проекционный чертёж. Примерами использования проекционных методов служат рисунки на граните, сохранившаяся стенная живопись, изображения в папирусах. Содержание древней росписи на китайском шёлке и на стенах пещерных храмов Аджанты в Индии весьма разнообразно. Но в основе каждого из этих памятников лежит изображение реальных предметов трёхмерного пространства на плоскости.

В 1525 г немецкий художник Альбрехт Дюрер написал обширный трактат, по содержанию близкий к изложению основ начертательной геометрии. Затем им был написан ещё ряд статей. В те времена, несмотря на развитие методов графического изображения и широкое применение их в технике, в технической литературе они излагались лишь в виде правил построения.

К концу XVIII века проекционные методы уже имели свою многовековую историю. Однако единого метода изображения объёмного тела на плоском чертеже разработано еще не было. Исторически назрела задача научного обобщения накопленного и чрезвычайно разрозненного материала по графическим методам изображения. Развитие промышленности и связанное с ним разделение труда настоятельно требовали создания единой теории изображения, строгой систематизации правил выполнения чертежей —

документов, обеспечивающих чёткую передачу замыслов зодчего, инженера, проектировщика исполнителю. Эта задача была успешно решена замечательным французским учёным и активным участником Великой французской буржуазной революции Гаспаром Монжем (1746-1818). В своих трудах Монж свёл в стройную научную систему весь накопленный развитием науки и техники в ряде стран материал по ортогональному проецированию.

В своём классическом произведении «Geometrie descriptive» («Начертательная геометрия»), опубликованном в 1798г., Монж разработал общую геометрическую теорию, дающую возможность на плоском листе, содержащем ортогональные проекции трёхмерного тела, решать различные стереометрические задачи. Им была создана абстрактная геометрическая модель реального пространства, согласно которой каждой точке трёхмерного пространства ставится в соответствие две её ортогональные проекции на взаимно перпендикулярные плоскости. Проекционный чертёж, построенный по правилам начертательной геометрии, становится рабочим инструментом инженеров, архитекторов и техников всех стран.

Г. Монж первый перешёл от изучения геометрии на плоскости к глубокому исследованию геометрии в пространстве. Он вошёл в историю науки и техники не только как основатель начертательной геометрии, но и как автор теории образования поверхностей, методов интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. Значительны заслуги Монжа и в других науках: химии, металлургии, оптике.

Со времён Монжа начертательная геометрия завоевала себе достойное место в технической школе всех стран.

Отечественная школа развития начертательной геометрии неразрывно связана с деятельностью Института корпуса инженеров путей сообщения, основанного в Петербурге в 1809г. Под его непосредственным влиянием формировалась и русская школа начертательной геометрии. К моменту, когда курс начертательной геометрии был введён в программы других учебных заведений, Институт корпуса инженеров путей сообщения уже подготовил много опытных и квалифицированных преподавателей, из которых, прежде всего, следует назвать Якова Александровича Севастьянова (1796-1849). После окончания института в 1814г, Я.А. Севастьянов был назначен репетитором по начертательной геометрии. В 1818 г. он читает курс на русском языке.

В 1821г. он издаёт первый русский учебник по этой дисциплине — «Основания начертательной геометрии». В 1824г. плодотворная деятельность 28 летнего Я.А. Севастьянова была достойно отмечена присвоением ему звания профессора.

В XX веке необходимо отметить профессоров Н.Ф. Четверухина и И.И. Котова, преподававших начертательную геометрию в Московском авиационном институте. Коллектив авторов под руководством Н.Ф. Четверухина издал учебник, написанный на высоком теоретическом уровне.

Большой вклад внёс В.О. Гордон (1892-1971), издавший учебник по начертательной геометрии высокой методической направленности, который переиздаётся и в настоящее время.

В МВТУ им. Н.Э. Баумана профессором Х.А. Арустамовым (1899-1979) была разработана методика преподавания графических дисциплин. Кафедре «Инженерная графика» МВТУ им. Н.Э. Баумана первой в СССР поручили осуществлять повышение квалификации преподавателей начертательной геометрии страны. Только на этой кафедре повышали квалификацию заведующие кафедрами «Инженерной графики» отечественных вузов.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

1. Обозначения геометрических фигур

1. Геометрическая фигура обозначается — ***Ф***

2. Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами:

A, ***B***, ***C***, ***D***, ***E***, ...
1, ***2***, *3*, ***4***, ***5***, ...

3. Линии произвольного расположения обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

a, ***b***, ***c***, ***d***, ...

линии, параллельные плоскостям проекций обозначаются:

h — горизонтальная прямая,
f — фронтальная прямая,
p — профильная прямая.

4. Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$

5. Угловая величина обозначается символом ^, который помещается над углом:

$a \hat{} b = 45°$ — угол между прямыми ***a*** и ***b*** равен 45°.

6. Расстояние между геометрическими фигурами обозначается двумя вертикальными линиями — | |. Например:

|***AB***| — расстояние между точками ***A*** и ***B*** (длина отрезка ***AB***);
|***Aa***| — расстояние от точки ***A*** до линии ***a***;
|***A***α| — расстояние от точки ***A*** до поверхности α ;
|***ab***| — расстояние от линии ***a*** до линии ***b;***
|$\alpha\beta$| — расстояние от поверхности α до поверхности β.

7. Для плоскостей проекций приняты обозначения:

π — плоскость проекций произвольного положения;
π_1 — горизонтальная плоскость проекций;
π_2 — фронтальная плоскость проекций;
π_3 — профильная плоскость проекций.

Дополнительные плоскости проекций обозначаются π_4, π_5, π_6 и т.д.

8. Оси проекций обозначаются:

x — ось абсцисс;
y — ось ординат;
z — ось аппликат.

9. Проекции точек, линий, поверхностей обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением штрихов:

A', B', C', D', ... — горизонтальные проекции точек;
A'', B'', C'', D'', ... — фронтальные проекции точек;
A''', B''', C''', D''', ... — профильные проекции точек;
a', b', c', d', ... — горизонтальные проекции линий;
a'', b'', c'', d'', ... — фронтальные проекции линий;
a''', b''', c''', d''', ... — профильные проекции линий;
$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$, ... — горизонтальные проекции поверхностей;
$\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \varepsilon''$, ... — фронтальные проекции поверхностей;
$\alpha''', \beta''', \gamma''', \delta''', \varepsilon'''$, ... — профильные проекции поверхностей;

10. Следы плоскостей (поверхностей) обозначаются:

$h_{o\alpha}$ — горизонтальный след плоскости (поверхности) α;
$f_{o\alpha}$ — фронтальный след плоскости (поверхности) α;
$p_{o\alpha}$ — профильный след плоскости (поверхности) α;

11. Следы прямых линий обозначаются:

H_a — горизонтальный след прямой a;
F_a — фронтальный след прямой a;
P_a — профильный след прямой a.

12. Последовательность геометрических фигур отмечается подстрочными индексами:

A_1, B_2, C_3, D_4, ... — последовательность точек;
a_1, b_2, c_3, d_4, ... — последовательность линий;
$\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \delta_4$, ... — последовательность поверхностей.

13. Аксонометрическая (картинная) плоскость проекций обозначается буквой α.

14. Аксонометрические проекции точек обозначаются с подстрочным индексом α:

$A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$, ...

15. Аксонометрические оси проекций обозначаются $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$.

16. Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям обозначаются k_x, k_y, k_z.

2. Символика

Символ	Значение	Пример символической записи
Δ	Треугольник	ΔABC — треугольник ABC
=	Равенство	$\lvert AB\rvert = \lvert CD\rvert$ — отрезок AB равен отрезку CD
≠	Неравенство	$\lvert AB\rvert \neq \lvert CD\rvert$ — отрезки AB и CD не равны

$\cong$	Конгруэнтность	$\boldsymbol{\Delta ABC \cong \Delta ABD}$ — треугольники $\boldsymbol{ABC}$ и $\boldsymbol{ABD}$ конгруэнтны
$\equiv$	Тождество или совпадение	$\boldsymbol{A' \equiv B'}$ — горизонтальные проекции точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ совпадают
$\approx$	Приблизительное равенство	$\boldsymbol{\pi \approx 3{,}14}$ — число $\boldsymbol{\pi}$ приблизительно равно 3,14
$\parallel$	Параллельность	$\boldsymbol{\beta \parallel \gamma}$ — плоскость $\boldsymbol{\beta}$ параллельна плоскости $\boldsymbol{\gamma}$
$\nparallel$	Непараллельность	$\boldsymbol{b \nparallel \gamma}$ — прямая $\boldsymbol{b}$ непараллельна плоскости $\boldsymbol{\gamma}$
$\perp$	Перпендикулярность	$\boldsymbol{b \perp \gamma}$ — прямая $\boldsymbol{b}$ перпендикулярна плоскости $\boldsymbol{\gamma}$
$\not\perp$	Неперпендикулярность	$\boldsymbol{b \not\perp \gamma}$ — прямая $\boldsymbol{b}$ неперпендикулярна плоскости $\boldsymbol{\gamma}$
$\bar{\cap}$	Касательность	$\boldsymbol{b \mathbin{\bar{\cap}} \gamma}$ — прямая $\boldsymbol{b}$ касается поверхности $\boldsymbol{\gamma}$
$\cap$	Пересечение	$\boldsymbol{b \cap c = K}$ — линии $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{K}$
$\rightarrow$	Отображение	$\boldsymbol{A \rightarrow A'}$ — точка $\boldsymbol{A}$ проецируется в точку $\boldsymbol{A'}$
$\in$	Принадлежность элемента множеству	$\boldsymbol{A \in \gamma}$ — точка $\boldsymbol{A}$ принадлежит поверхности $\boldsymbol{\gamma}$
$\subset$	Принадлежность подмножества множеству	$\boldsymbol{b \subset \gamma}$ — линия $\boldsymbol{b}$ принадлежит поверхности $\boldsymbol{\gamma}$
$\varnothing$	Пустое множество, отсутствие элементов	$\boldsymbol{b \cap c = \varnothing}$ — линии $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не пересекаются
$\Rightarrow$	Логическое следствие	$\boldsymbol{b \cap c = K \Rightarrow b' \cap c' = K'}$ — если прямые $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{K}$, то их горизонтальные проекции пересекаются в точке $\boldsymbol{K'}$, являющейся горизонтальной проекцией точки $\boldsymbol{K}$
$\Leftrightarrow$	Эквивалентность	$\boldsymbol{A \in \gamma \Leftrightarrow A \in b \subset \gamma}$ — если точка $\boldsymbol{A}$ принадлежит поверхности $\boldsymbol{\gamma}$, то она принадлежит линии $\boldsymbol{b}$, принадлежащей этой поверхности, и, наоборот, если точка $\boldsymbol{A}$ принадлежит линии $\boldsymbol{b}$, принадлежащей поверхности $\boldsymbol{\gamma}$, то она принадлежит поверхности $\boldsymbol{\gamma}$.
$\wedge$	Союз "и"	$\boldsymbol{(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \square \pi) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi}$ — если фигура $\boldsymbol{\Phi}$ принадлежит плоскости $\boldsymbol{\beta}$ и плоскость $\boldsymbol{\beta}$ параллельна плоскости проекций $\boldsymbol{\pi}$, то проекция $\boldsymbol{\Phi'}$ этой фигуры конгруэнтна самой фигуре $\boldsymbol{\Phi}$

Глава I

МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Не всякое изображение предмета на листе бумаги позволяет точно определить его геометрическую форму. Поэтому необходимо, чтобы изображение предмета было построено по определённым геометрическим правилам, позволяющим от плоских форм переходить к пространственным формам изображаемого предмета.

Такое геометрически закономерное изображение пространственного предмета на плоскости достигается с помощью **метода проецирования**, который и является методом начертательной геометрии.

Различают два основных метода проецирования:

1) центральное (полярное, коническое) проецирование;

2) параллельное (цилиндрическое) проецирование.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какой метод является главным в начертательной геометрии?*
- *Как называются два основных метода проецирования?*

§1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

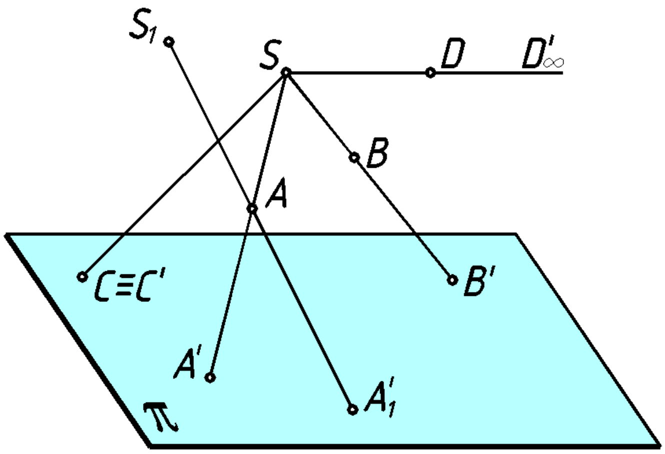


Рис. 1

Выберем в пространстве плоскость π и точку S, не лежащую в плоскости π (рис.1). Плоскость π называется ***плоскостью проекций***, а точка S — ***центром проецирования***. Плоскость проекций π и центр проецирования S определяют ***аппарат центрального метода проецирования.***

Для построения проекции некоторой точки A следует через центр проецирования S и заданную точку A провести прямую до пересечения ее с плоскостью проекций π в точке A'. Точка A' называется ***центральной проекцией*** точки A, а прямая, проходящая через точки S и A — ***проецирующей прямой***. Аналогично можно найти проекции любой точки пространства, например, точки B и точки C. Точка C лежит в плоскости проекций, поэтому ее проекция совпадает с самой точкой.

При центральном проецировании все проецирующие прямые проходят через центр проецирования (точку ***S***).

Проекционный чертеж должен обладать свойством обратимости, т.е. позволять по проекциям точек определять их положение в пространстве. Если задана проекция A' точки A и центр проецирования S, можно построить проецирующую прямую, любая точка которой будет проецироваться в точку A'. Отсюда можно сделать вывод, что одна проекция точки не определяет её положения в пространстве.

Если задать второй центр проецирования (точку S_1), то можно найти еще одну проекцию A'_1 точки A. Проведя проецирующие прямые SA' и SA'_1, найдем точку их пересечения, которая и будет определять положение точки A в пространстве.

Следовательно, две проекции точки определяют её положение в пространстве.

Когда в начертательной геометрии применяют выражение «дана точка», то подразумевают, что заданы две её проекции.

Если точка D будет расположена таким образом, что её проецирующая прямая SD параллельна плоскости проекций π, то мы не сможем найти ее проекцию. Таких точек бесчисленное множество, все они принадлежат плоскости параллельной плоскости проекций π.

Для того, чтобы при любом положении точки в пространстве можно было найти её проекцию, необходимо было подвергнуть реконструкции трёхмерное евклидово пространство.

Решение проблемы в XVII веке нашёл французский математик Жерар Дезарг. Он предложил трактовать параллельные прямые как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Такие точки называются ***несобственными*** (бесконечно удалёнными), в отличие от остальных точек, называемых ***собственными*** точками.

Это допущение позволяет устранить недостаток, являющийся следствием аксиомы о параллельности, и считать следующее:

1) две параллельные прямые пересекаются в несобственной точке;

2) прямая, параллельная плоскости, пересекает её в несобственной точке;

3) две параллельные плоскости пересекаются по несобственной прямой:

Присоединение к евклидову пространству несобственных элементов образует ***расширенное эвклидово пространство*** (иногда называемое *проективным пространством — см [3]),* в котором:

1) две прямые, принадлежащие одной плоскости, пересекаются в точке (собственной или несобственной);

2) две плоскости пересекаются по прямой (собственной или несобственной);

3) прямая и плоскость пересекаются в точке (собственной или несобственной).

Во всех рассмотренных случаях точка и прямая могут быть как собственными, так и несобственными.

При таком дополнении евклидова пространства проекцией точки D будет несобственная точка, которую мы обозначим D_∞'.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Каков аппарат центрального метода проецирования?*
- *Как получают центральную проекцию точки?*
- *Как называется прямая, проходящая через центр проецирования и проецируемую точку?*
- *Почему одна проекция точки не определяет ее положение в пространстве?*
- *Сколькими проекциями определяется положение точки в пространстве?*
- *Как получить две центральные проекции точки?*
- *Какие точки называются несобственными?*

§2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ

Параллельное проецирование получается из центрального, если за центр проецирования принять бесконечно удаленную точку. В этом случае проецирующие прямые будут параллельны между собой. Направление проецирования ***s*** и плоскость проекций ***π*** определяют аппарат метода проецирования (рис.2).

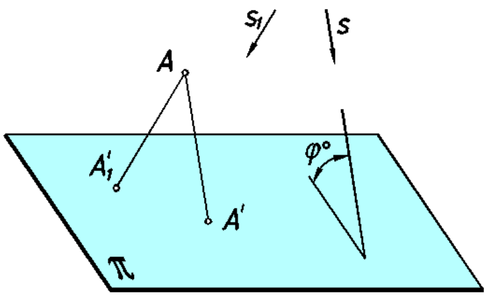


Рис. 2

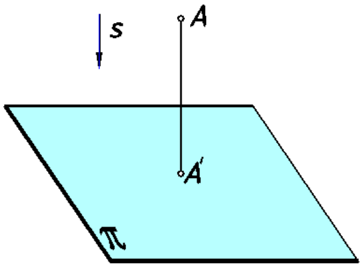


Рис. 3

Так же, как и при центральном проецировании, одна проекция точки не определяет положение этой точки в пространстве. Для получения ее второй проекции необходимо задать еще одно направление проецирования s_1.

Если направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называется ***косоугольным*** (φ°≠90°). Если же направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называется ***прямоугольным*** или ***ортогональным***. При ортогональном проецировании проекцией ***A'*** точки ***A*** на плоскость ***π*** является основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость (рис.3).

При ортогональном проецировании нельзя выбрать второй центр проецирования для нахождения второй проекции точки. Выход может быть найден в задании одной проекции точки и расстояния от точки до плоскости проекций (рис.4).

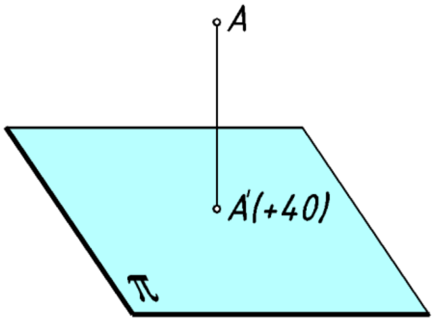


Рис. 4

Если точка находится над плоскостью проекций, то расстояние положительно, если точка находится под плоскостью проекций, то расстояние отрицательно.

Такие проекции носят название ***проекций с числовыми отметками***. Они применяются в картографии, геодезии, строительстве.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Каков аппарат параллельного метода проецирования?*
- *Как получить две параллельные проекции точки?*
- *Какое проецирование называется косоугольным, а какое — ортогональным?*
- *Что называется ортогональной проекцией точки?*

§3. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Геометрические фигуры проецируются на плоскость проекции, в общем случае, с искажением. При этом характер искажений зависит от метода проецирования и положения проецируемой фигуры по отношению к плоскости проекции. В частности, при ортогональном проецировании, если проецируемая фигура занимает произвольное положение по отношению к плоскости проекции, её проекция не сохраняет метрических характеристик оригинала — происходит искажение линейных и угловых величин.

Свойства геометрических фигур, которые не изменяются в процессе проецирования, называют ***независимыми*** относительно выбранного способа проецирования.

При решении прямой задачи ортогонального проецирования — получении проекций геометрической фигуры по её оригиналу, как и при решении обратной задачи — определении формы и размеров оригинала по его ортогональным проекциям, пользуются этими свойствами ортогонального проецирования.

Различают три основных свойства ортогонального проецирования:

1. Ортогональная проекция точки есть точка (рис.4):

$$A \rightarrow A'$$

Из свойства 1 следует, что в общем случае ортогональная проекция прямой на плоскость есть прямая (рис.5а):

$$a \not\perp \pi \Rightarrow a \rightarrow a'$$

В частном случае, когда прямая перпендикулярна плоскости проекции, она проецируется в точку (рис.5б):

$$a \perp \pi \Rightarrow a \rightarrow A'$$

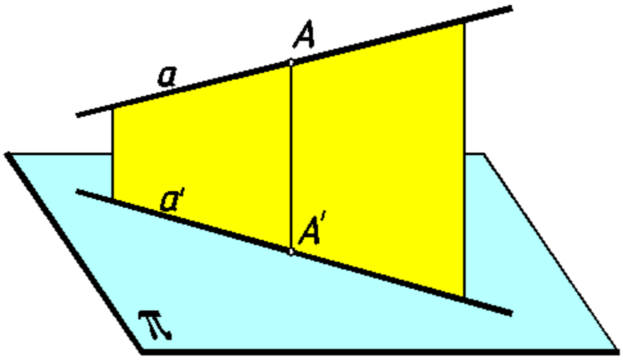


Рис. 5а

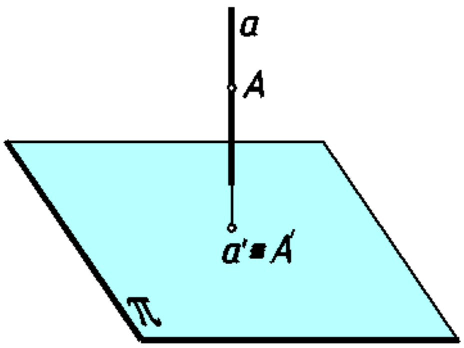


Рис. 5б

Первым свойством описывается <u>метод проецирования</u>.

2. Если фигура *Ф₁* принадлежит фигуре *Ф*, то ортогональная проекция фигуры *Ф₁'* принадлежит ортогональной проекции фигуры *Ф'* (рис.6):

$$Ф_1 \subset Ф \Rightarrow Ф'_1 \subset Ф'$$

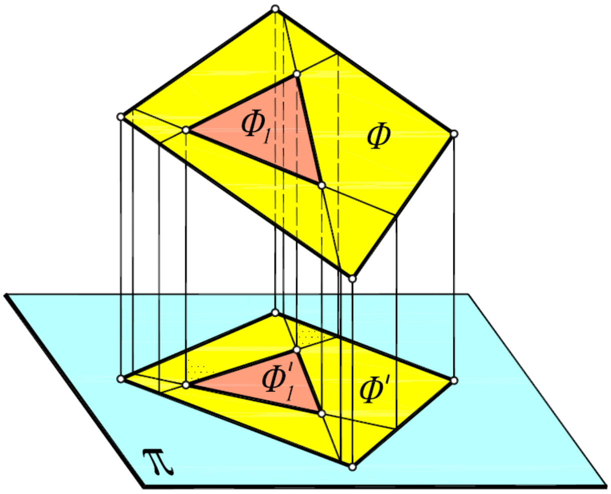


Рис. 6

Из свойства 2 следует:

а) Если точка ***A*** принадлежит линии ***l***, то ортогональная проекция ***A′*** точки принадлежит ортогональной проекции ***l′*** линии (рис. 7):

$$A \in l \Rightarrow A' \in l'$$

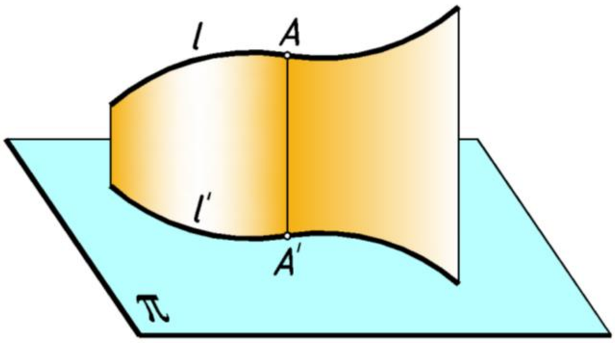


Рис. 7

б) если точка ***A*** принадлежит линии ***l***, которая, в свою очередь, принадлежит поверхности ***β***, то ортогональная проекция ***A′*** точки принадлежит ортогональной проекции ***β′*** поверхности (рис. 8):

$$A \in l \wedge l \in \beta \Rightarrow A' \in \beta'$$

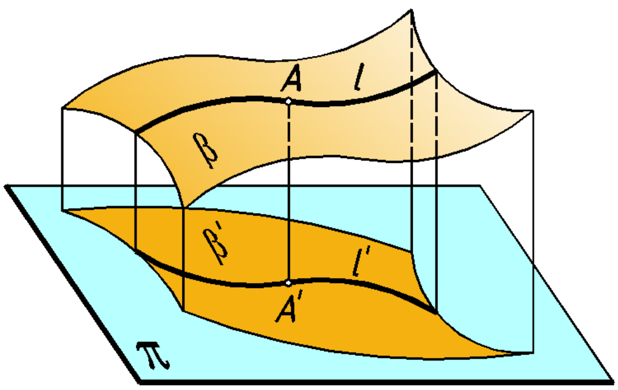


Рис. 8

в) если прямые ***a*** и ***b*** пересекаются в точке ***K***, то проекции этих прямых ***a′*** и ***b'*** пересекаются в точке ***K′***, являющейся ортогональной проекцией точки ***K*** (рис.9):

$$a \cap b = K \Rightarrow a' \cap b' = K'$$

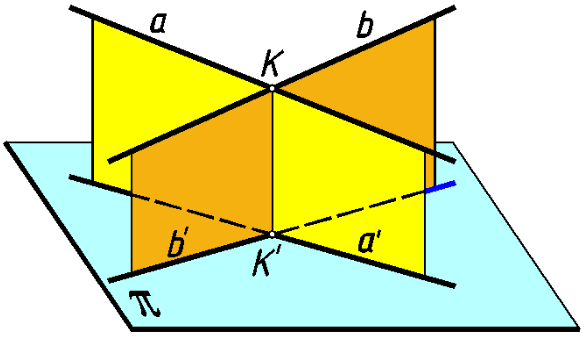


Рис. 9

г) если прямые ***a*** и ***b*** параллельны между собой и не перпендикулярны плоскости проекции, то параллельны и их ортогональные проекции на эту плоскость (рис.10):

$$(a \parallel \mathrm{b}) \wedge (a \not\perp \pi) \wedge (b \not\perp \pi) \Rightarrow (a' \parallel \mathrm{b}')$$

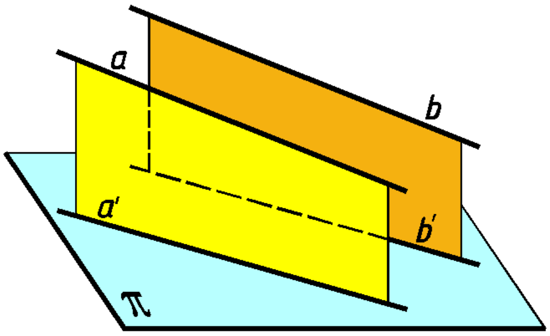


Рис. 10

д) если отрезок ***AB*** параллелен отрезку ***CD****,* то отношение длин отрезков равно отношению длин их ортогональных проекций (рис.11):

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

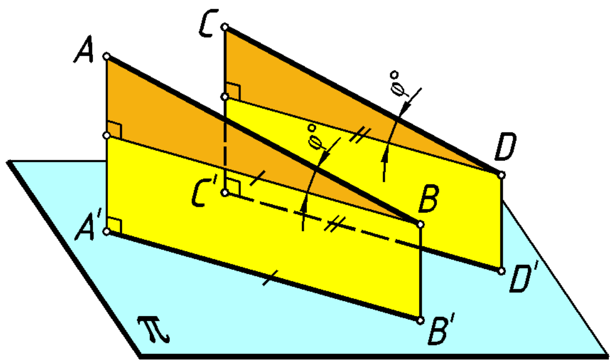


Рис. 11

е) если точка ***B*** принадлежит отрезку ***AC*** и делит его в некотором отношении, то и проекция ***B'*** делит проекции отрезка в том же самом отношении (рис.12):

$$B \in [AC] \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}$$

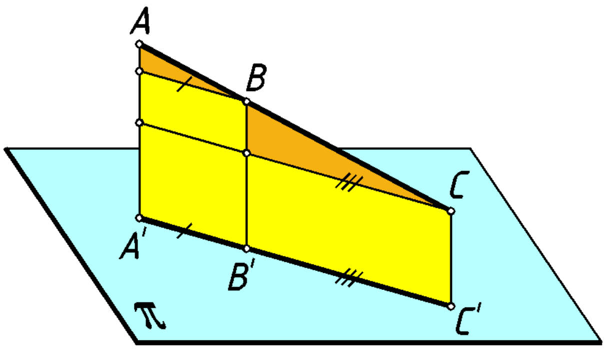


Рис. 12

Второе свойство предоставляет возможность решать <u>позиционные</u> задачи, т.е. задачи на принадлежность и пересечение геометрических фигур.

3. Если фигура *Φ* принадлежит плоскости *β*, параллельной плоскости проекции *π*, то ортогональная проекция *Φ'* этой фигуры на плоскость *π* конгруэнтна самой фигуре *Φ* (рис.13):

$$(\Phi \subset \beta) \wedge (\beta \parallel \pi) \Rightarrow \Phi' \cong \Phi$$

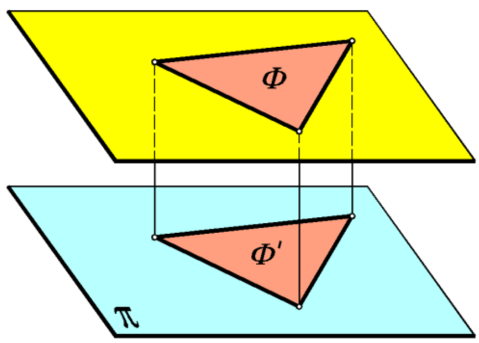


Рис. 13

Третье свойство даёт возможность решать <u>метрические задачи</u>, к которым относятся задачи, связанные с определением истинных (натуральных) величин расстояний, углов и плоских фигур на комплексном чертеже.

В заключение сформулируем ***Теорему о частном случае проецирования прямого угла,*** которая также относится к свойствам ортогонального проецирования:

Если хотя бы одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, то проекцией этого угла будет также прямой угол (рис.14):

$$(a \hat{} b) = 90^o \wedge a \parallel \pi \wedge b \not\perp \pi \Rightarrow (a' \hat{} b') = 90^o$$

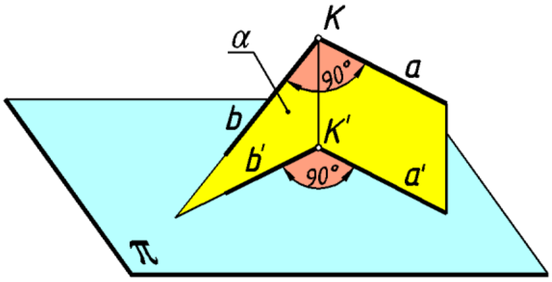


Рис. 14

Приведем доказательство этой теоремы.

Прямая ***b*** и проецирующий отрезок ***KK'*** образуют плоскость **α**, перпендикулярную к прямой ***a***. Т.к. горизонтальная проекция ***a'*** параллельна прямой ***a***, то прямая ***a'*** также перпендикулярна плоскости **α**. А это значит, что ***a'*** перпендикулярна прямой ***b'***, лежащей в плоскости **α**, что и требовалось доказать

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Перечислите основные свойства ортогонального проецирования.*
- *Сформулируйте теорему о проецировании прямого угла.*

§4. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ НА ДВЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Ортогональное проецирование имеет ряд преимуществ перед другими методами проецирования. К ним относятся простота геометрических построений ортогональных проекций точек и сохранение на проекциях при определённых условиях формы и размеров проецируемой фигуры.

При ортогональном проецировании неопределенность изображения какого-либо предмета на одной плоскости можно устранить, дополнив его изображением этого же предмета на другой плоскости, не параллельной первой. Такие два изображения полностью определяют положение предмета в пространстве. Основоположник начертательной геометрии Гаспар Монж предложил применять проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рис.15).

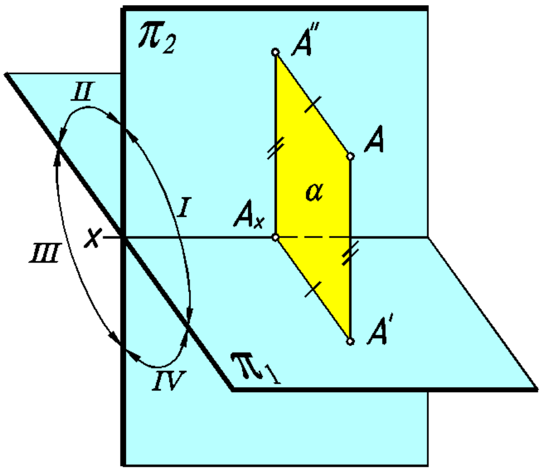


Рис. 15

Плоскость проекций, расположенную горизонтально, называют *горизонтальной плоскостью проекций* и обозначают π_1.

Плоскость проекций, расположенную вертикально, называют *фронтальной плоскостью проекций* и обозначают π_2.

Плоскости проекций пересекаются между собой по прямой x, называемой *осью проекций*. Ось проекций делит каждую из плоскостей проекций на две части, называемые *полами плоскостей проекций*. У горизонтальной плоскости проекций различают переднюю и заднюю полы, а у фронтальной — верхнюю и нижнюю.

Всё пространство делится плоскостями проекций на четыре части, называемые ***четвертями*** или ***квадрантами*** пространства (на рис.15 они обозначены римскими цифрами). Первая четверть пространства расположена над передней полой горизонтальной плоскости проекций и перед верхней полой фронтальной плоскости проекций. Вторая четверть пространства расположена над задней полой горизонтальной и за верхней полой фронтальной плоскостей проекций. Третья четверть пространства расположена под задней полой горизонтальной и за нижней полой фронтальной плоскостей проекций. Четвертая четверть пространства расположена под передней полой горизонтальной и перед нижней полой фронтальной плоскостей проекций.

Проекцию точки на горизонтальную плоскость проекций называют *горизонтальной проекцией точки* A и обозначают той же буквой, что и точку, только со штрихом — A'.

Проекцию точки на фронтальную плоскость проекций называют *фронтальной проекцией точки* A и обозначают той же буквой, что и точку, только с двумя штрихами — A''.

Проецирующие прямые AA' и AA'' образуют плоскость α, перпендикулярную горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций, следовательно, и оси проекций x. Пересечение плоскости α с осью проекций x обозначают той же буквой, что и проецируемую точку, но с индексом x — A_x.

Положение точки в пространстве задается двумя её проекциями на чертеже. Однако, можно привязать систему плоскостей проекций к декартовой системе координат. Для этого любую точку O на оси проекций выбрать в качестве начала координат и провести через нее оси y и z, расположив их в плоскостях проекций π_1 и π_2 (рис.16). Тогда любую пространственную точку и ее проекции можно задавать координатами x, y и z.

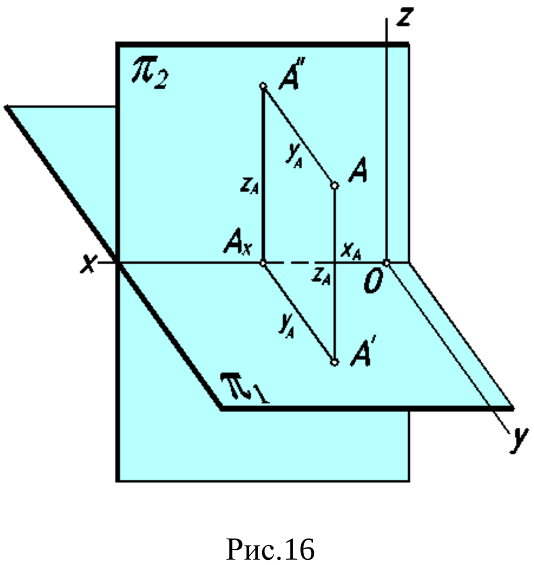


Рис.16

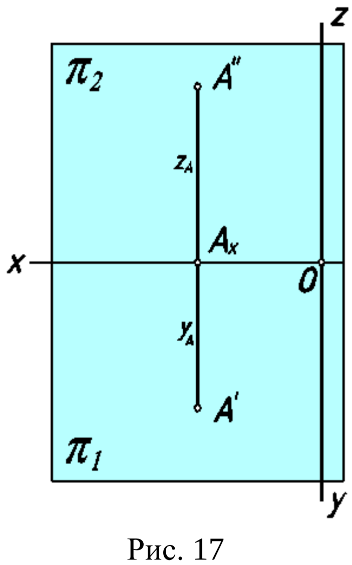


Рис. 17

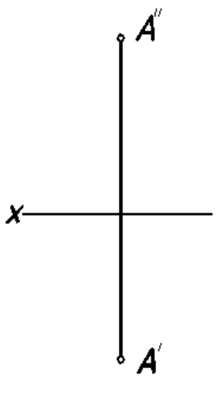


Рис.18

Координата y точки показывает расстояние от точки до фронтальной плоскости проекций. Её определяет величина отрезка AA'', равного отрезку $A'A_x$. Координата y положительна, если точка расположена перед фронтальной плоскостью проекций, и отрицательна, если точка расположена за фронтальной плоскостью проекций.

Координата z точки показывает расстояние от точки до горизонтальной плоскости проекций. Её определяет величина отрезка AA', равного отрезку $A''A_x$. Координата z положительна, если точка расположена над горизонтальной плоскостью проекций, и отрицательна, если точка расположена под горизонтальной плоскостью проекций:

$$|\mathbf{y}| = |\mathbf{AA''}| = |\mathbf{A'A}_{\mathbf{x}}|$$
$$|\mathbf{z}| = |\mathbf{AA'}| = |\mathbf{A''A}_{\mathbf{x}}|$$

Для перехода от пространственной модели к проекционному чертежу горизонтальную плоскость проекций поворачивают вокруг оси проекций x до совмещения с фронтальной плоскостью проекций. Причём, переднюю полу горизонтальной плоскости проекций совмещают с нижней полой фронтальной плоскости проекций, а заднюю полу горизонтальной плоскости проекций — с верхней полой фронтальной плоскости проекций (рис.17).

Так как отрезки $A''A_x$ и $A'A_x$ перпендикулярны оси проекций x и проходят через одну и ту же точку A_x, фронтальная A'' и горизонтальная A' проекции точки A лежат на одном перпендикуляре к оси проекций x. Этот перпендикуляр называется *вертикальной линией связи* между проекциями точки.

На проекционном чертеже координата y, равная по величине отрезку $A'A_x$, определяет расстояние от горизонтальной проекции точки до оси проекций x. Если координата y положительна, горизонтальная проекция точки располагается под осью проекций x, а если отрицательна — над ней. При координате y, равной нулю, горизонтальная проекция точки располагается на оси проекций x.

На проекционном чертеже координата z, равная по величине отрезку $A''A_x$, определяет расстояние от фронтальной проекции точки до оси проекций x. Если координата z положительна, фронтальная проекция точки располагается над осью проекций x, а если отрицательна — под ней. При координате z, равной нулю, фронтальная проекция точки располагается на оси проекций x.

Таким образом, по расположению проекций точек относительно оси проекций можно определить их положение в пространстве, а именно: в какой четверти пространства находится данная точка и на каком расстоянии от плоскостей проекций.

Если координата z точки положительна, то фронтальная проекция точки расположена над осью x. А это ***I*** и ***II*** четверти пространства. При отрицательном значении координаты z фронтальная проекция точки расположена под осью x. Это уже ***III*** и ***IV*** четверти пространства

Если координата y точки положительна, то горизонтальная проекция точки расположена под осью проекций x. Это ***I*** и ***IV*** четверти пространства. Если координата y точки отрицательна, то её горизонтальная проекция расположена над осью проекций x. Это ***II*** и ***III*** четверти пространства.

Если точка принадлежит горизонтальной плоскости проекций, то ее фронтальная проекция находится на оси проекций x. Если точка принадлежит фронтальной плоскости проекций, то ее горизонтальная проекция находится на оси проекций x. Если точка принадлежит обеим плоскостям проекций, значит, она находится на линии их пересечения (на оси проекций). Проекции такой точки совпадают и лежат на оси x.

В окончательном виде проекционный чертеж выглядит так, как представлено на рис.18. Плоскости проекций не ограничивают рамками, т.к. они безграничны. Обозначения плоскостей проекций не наносят, т.к. в любом месте чертежа присутствуют точки и той и другой плоскости. Оси координат ***y*** и ***z*** не показывают, чтобы не загромождать чертеж. Не обозначают также осевые проекции точек.

На рис.19 представлены проекции точек, расположенных в различных четвертях пространства и на плоскостях проекций.

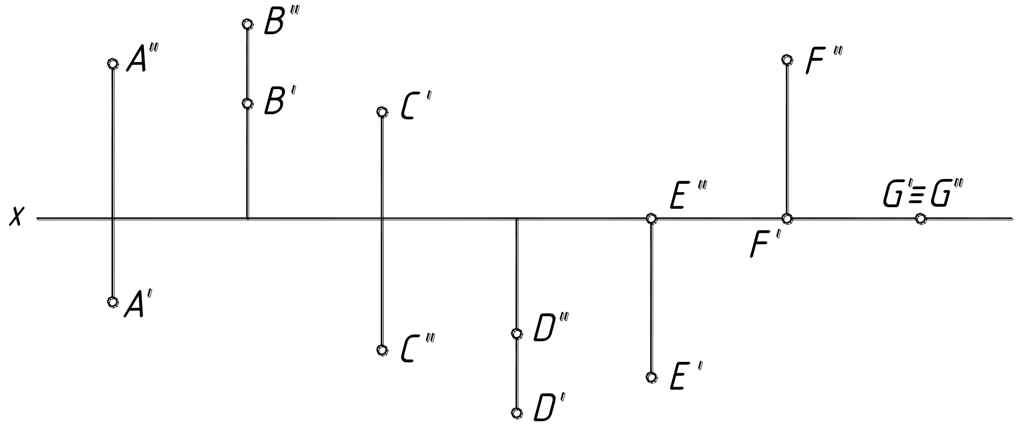


Рис. 19

Точка ***A*** расположена в ***I*** четверти пространства.

Точка ***B*** расположена во ***II*** четверти пространства.

Точка ***C*** расположена в ***III*** четверти пространства.

Точка ***D*** расположена в ***IV*** четверти пространства.

Точка ***E*** располжена на передней поле горизонтальной плоскости проекций.

Точка ***F*** располжена на верхней поле фронтальной плоскости проекций.

Точка ***G*** расположена на оси проекций ***x***.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Каково взаимное расположение двух плоскостей проекций?*
- *Как называются плоскости проекций, как они обозначаются?*
- *Что называется осью проекций, как она обозначается?*
- *Что называется квадрантами (четвертями) пространства, как они обозначаются, как располагаются относительно плоскостей проекций?*
- *Как называются проекции точек на основных плоскостях проекций, как они обозначаются?*
- *Как осуществляется переход от пространственной модели к проекционному чертежу?*
- *Как на проекционном чертеже располагаются горизонтальная и фронтальная проекции точки?*
- *Как называется отрезок прямой, соединяющий проекции точки?*
- *Как на чертеже определить расстояние от точки до горизонтальной и фронтальной плоскости проекций, какими координатами определяются эти расстояния?*
- *В каких четвертях пространства может располагаться точка, если её горизонтальная проекция расположена под осью проекции (над осью проекций)?*
- *В каких четвертях пространства может располагаться точка, если её фронтальная проекция расположена над осью проекции (под осью проекций)?*
- *В каком случае одна из проекций точки находится на оси проекций, обе проекции точки находятся на оси проекций?*

§5. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ НА ТРИ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Две проекции точки определяют её положение в пространстве. Однако иногда требуется введение дополнительной, третьей, плоскости проекций. Это делают, чтобы облегчить решение некоторых задач при особом положении геометрических элементов относительно плоскостей проекций и для облегчения перехода к машиностроительным чертежам, где проекции точек не имеют обозначений.

Третью плоскость проекций вводят перпендикулярно как фронтальной, так и горизонтальной плоскостям проекций. Её называют *профильной плоскостью проекций* и обозначают $\boldsymbol{\pi_3}$ (рис.20).

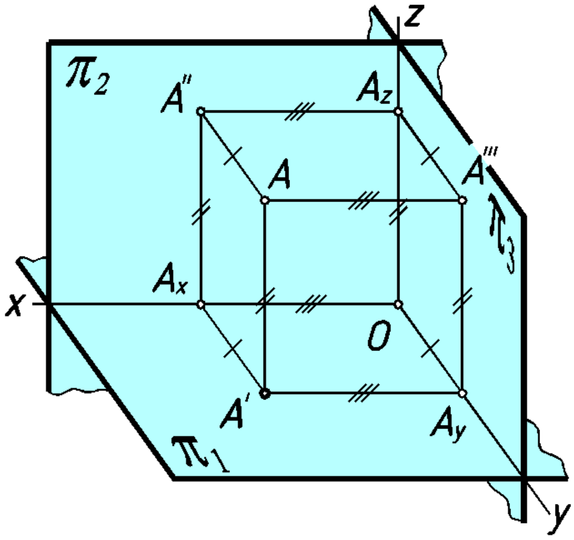


Рис. 20

Горизонтальная и профильная плоскости проекций пересекаются по прямой, которую называют *осью проекций* $\boldsymbol{y}$. Фронтальная и профильная плоскости проекций пересекаются по прямой, которую называют *осью проекций* z. Все оси проекций пересекаются в точке $\boldsymbol{O}$, которую принимают за начало координат.

Каждая из плоскостей проекций осями проекций делится на четыре полы, названия которых связаны с их положением относительно других плоскостей проекций. Горизонтальная плоскость проекций делится на *переднюю левую, заднюю левую, переднюю правую и заднюю правую полы*. Фронтальная плоскость проекций делится на *верхнюю левую, верхнюю правую, нижнюю левую* и *нижнюю правую* полы. Профильная плоскость проекций делится на *верхнюю переднюю, нижнюю переднюю, верхнюю заднюю* и *нижнюю заднюю* полы.

Всё пространство тремя плоскостями проекций делится на восемь частей, называемых ***октантами***. Слева от профильной плоскости проекций находятся октанты ***I-IV***, расположенные в такой же последовательности, как и четверти пространства. Справа от профильной плоскости проекций в такой же последовательности расположены октанты ***V-VIII***.

Для нахождения профильной проекции точки $\boldsymbol{A}$ необходимо из этой точки опустить перпендикуляр на плоскость проекций $\boldsymbol{\pi_3}$. Профильную проекцию точки обозначают той же буквой, что и точку, но с тремя штрихами.

В пространстве расстояние от точки до профильной плоскости проекций определяет координата $\boldsymbol{x}$, равная по величине отрезку $\boldsymbol{AA'''}$. Координата $\boldsymbol{x}$ положительна, если точка расположена слева от профильной плоскости проекций, и отрицательна, если точка расположена справа от неё.

Положение точки в системе трёх плоскостей проекций определяется тремя координатами: x, y, z:

$$| x | = | AA''' | = | A''A_z | = | A'A_y | = | A_xO |,$$
$$| y | = | AA'' | = | A'A_x | = | A'''A_z | = | A_yO |,$$
$$| z | = | AA' | = | A''A_x | = | A'''A_y | = | A_zO |.$$

Для перехода к плоскому чертежу горизонтальную плоскость проекций совмещают с фронтальной плоскостью проекций так же, как при образовании чертежа на две плоскости проекций, а профильную плоскость проекций поворачивают вокруг оси проекций $\mathbf{z}$ до совмещения с фронтальной плоскостью проекций. При этом верхняя передняя пола профильной плоскости проекций совмещается с верхней правой полой фронтальной плоскости проекций (рис.21).

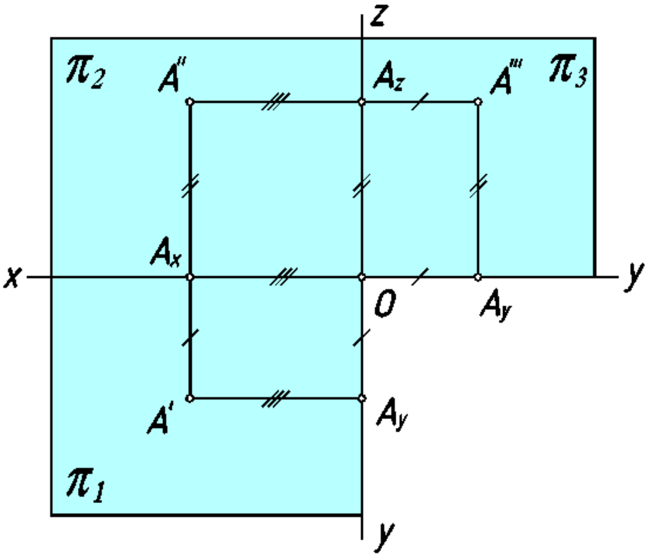


Рис. 21

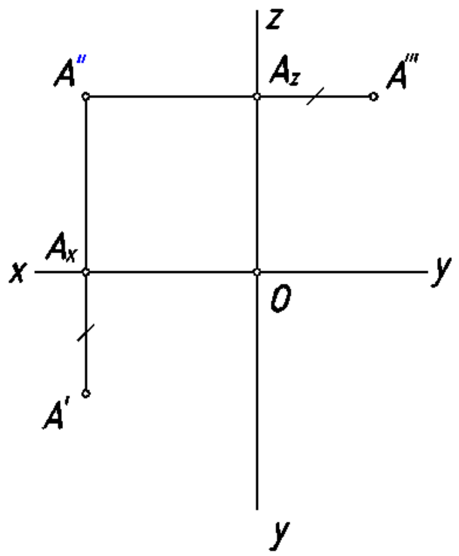


Рис. 22

Окончательно чертеж точки на *картинном* чертеже (на три плоскости проекций) выглядит так, как показано на рис.22.

Так как прямые $A'' A_Z$ и $A'''A_Z$ перпендикулярны оси проекций $\mathbf{z}$ и проходят через одну и ту же точку A_Z, фронтальная A'' и профильная A''' проекции точки A лежат на одном перпендикуляре к оси проекций z. Этот перпендикуляр является *горизонтальной линией связи* между фронтальной и профильной проекциями точки.

Ранее утверждалось, что две проекции точки полностью определяют ее положение в пространстве. Действительно, если заданы горизонтальная и фронтальная проекции точки, то известны координаты y и z, необходимые для построения ее профильной проекции.

Для построения профильной проекции точки по двум её заданным проекциям следует руководствоваться следующим правилом:

1) из фронтальной проекции точки провести прямую, перпендикулярную оси проекций z (горизонтальная линия связи);

2) на проведенной прямой от оси проекций z отложить отрезок, равный по величине координате y точки (при положительном значении координаты y — вправо, а при отрицательном — влево).

Такое правило удобно использовать при нахождении профильной проекции точки, расположенной в любом октанте. На рис.22 представлен чертеж точки, находящейся в первом октанте (здесь координата y положительна, поэтому отложена вправо от оси z).

На рис.23 показано нахождение профильной проекции точки, расположенной в третьем октанте (здесь координата y отрицательна, поэтому отложена влево от оси z):

$$\left|A'''A_Z\right| = \left|A'A_x\right|$$

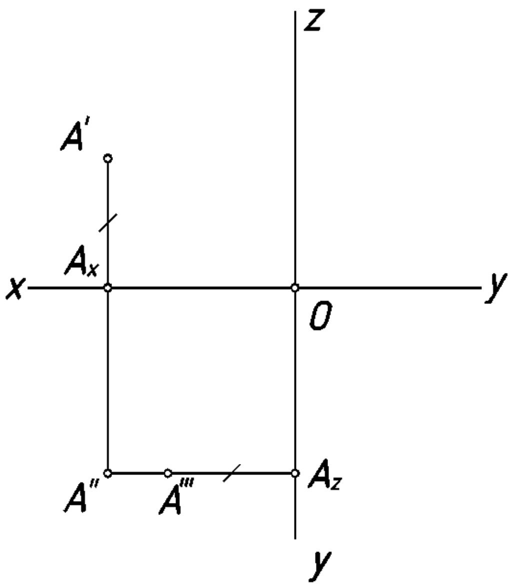


Рис.23

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как называется третья плоскость проекций, как она обозначается, каково ее положение относительно двух заданных плоскостей проекций?*
- *Как называется проекция точки на третьей плоскости проекций, как она обозначается?*
- *Как называются линии пересечения третьей плоскости проекций с двумя заданными, как они обозначаются?*
- *Что называется октантами пространства, как они обозначаются?*
- *Как осуществляется переход от пространственной модели к плоскому чертежу в случае проецирования на три плоскости проекций?*
- *Как располагаются проекции точек на трехпроекционном чертеже?*
- *Как связаны между собой фронтальная и профильная проекции точки?*
- *Как называется отрезок прямой между фронтальной и профильной проекциями точки?*
- *Как связаны между собой горизонтальная и профильная проекции точки?*
- *Как построить профильную проекцию точки, если заданы ее горизонтальная и фронтальная проекции?*

Глава II

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

§6. ЗАДАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ НА ЧЕРТЕЖЕ

Прямая линия определяется двумя нетождественными точками. Из этого следует, что для построения проекций прямой достаточно построить проекции двух точек, принадлежащих этой прямой, и через их одноименные проекции провести прямые линии (рис.24). При этом одна или две точки могут быть несобственными (рис.25).

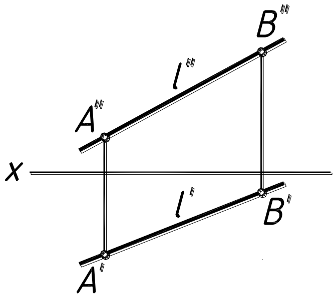


Рис. 24

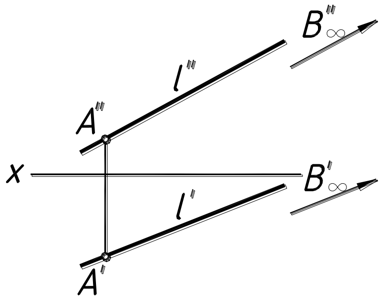


Рис. 25

Прямую на чертеже можно задать проекциями части этой прямой (рис.26) без указания точек на ней. При необходимости проекции прямой могут быть продолжены в обе стороны неограниченно. Можно также найти бесконечное множество точек, принадлежащих этой прямой, о чем будет сказано ниже.

При задании отрезка прямой следует обязательно задавать концы этого отрезка (рис.27).

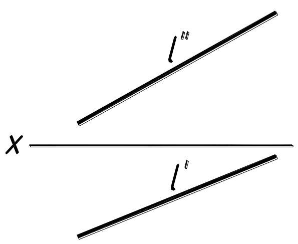


Рис. 26

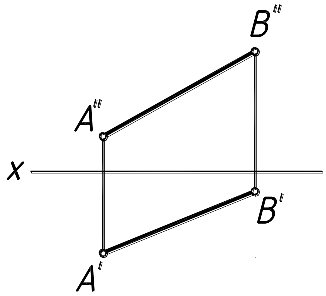


Рис. 27

В зависимости от расположения прямых относительно плоскостей проекций различают прямые общего положения и прямые частного положения. ***Прямыми общего положения*** называются прямые, не параллельные и не перпендикулярные ни одной из плоскостей проекций.

Проекции таких прямых наклонены к осям проекций под углами, отличными от 0° и 90° (рис.24-26).

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как на чертеже задают прямую линию?*
- *Какая прямая называется прямой общего положения, как располагаются ее проекции?*

§7. ПРЯМЫЕ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

К прямым частного положения относятся прямые, параллельные плоскостям проекций, называемые *прямыми уровня*, и прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называемые *проецирующими прямыми*.

7.1. Прямые уровня

Если прямая расположена параллельно горизонтальной плоскости проекций, то все её точки расположены на одинаковом расстоянии от этой плоскости (рис.28). Координаты z всех точек, принадлежащих прямой, равны. Следовательно, на чертеже фронтальная проекция прямой должна быть параллельна оси проекций x (рис.29). Такая прямая носит название ***горизонтальной прямой уровня.***

Горизонтальная проекция прямой наклонена к оси проекций x под углом β^o, равным углу наклона прямой в пространстве к фронтальной плоскости проекций. Отрезок AB этой прямой проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

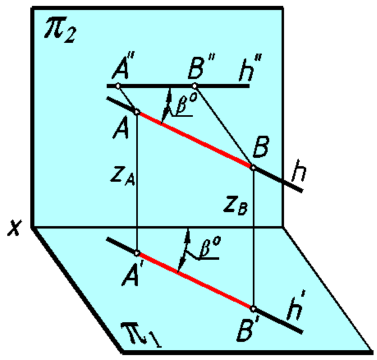


Рис. 28

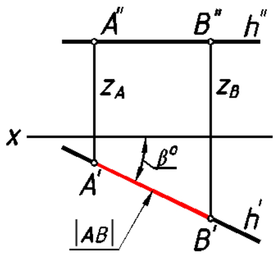


Рис. 29

Если прямая расположена параллельно фронтальной плоскости проекций, то все её точки расположены на одинаковом расстоянии от этой плоскости проекций (рис.30). Координаты y всех точек, принадлежащих прямой, равны. Следовательно, на чертеже горизонтальная проекция прямой должна быть параллельна оси проекций x (рис.31). Такая прямая носит название ***фронтальной прямой уровня***.

Фронтальная проекция прямой наклонена к оси проекций x под углом α^o, равным углу наклона прямой в пространстве к горизонтальной плоскости проекций. Отрезок AB этой прямой проецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину.

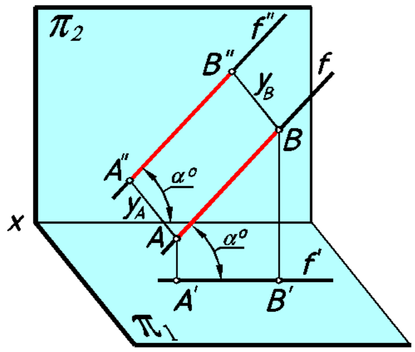


Рис. 30

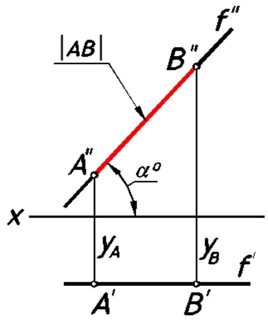


Рис. 31

Если прямая расположена параллельно профильной плоскости проекций, то все её точки расположены на одинаковом расстоянии от этой плоскости. Координаты x всех точек, принадлежащих прямой, равны (рис. 32). Следовательно, на чертеже фронтальная и горизонтальная проекции прямой должны быть перпендикулярны оси проекций x (рис.33). Такая прямая носит название ***профильной прямой уровня***. В системе двух плоскостей проекций профильную прямую необходимо задавать отрезком, иначе её положение в пространстве будет неопределенным. Профильная проекция такой прямой наклонена к оси y под углом α^o, а к оси z под углом β^o, где α^o и β^o — углы наклона прямой в пространстве к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно. Отрезок ***AB*** этой прямой проецируется на профильную плоскость проекций в натуральную величину.

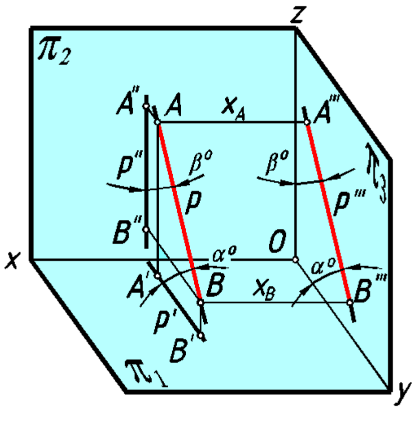


Рис. 32

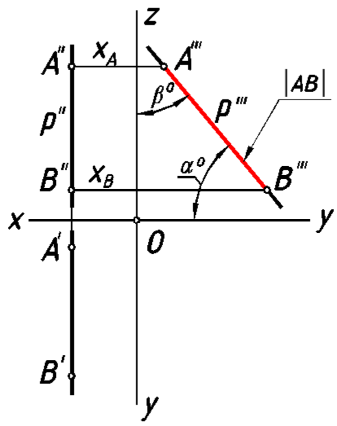


Рис. 33

7.2. Проецирующие прямые

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называется ***проецирующими прямыми.*** Такие прямые проецируются в точку на ту плоскость проекций, которой эта прямая перпендикулярна.

На рис.34 и рис.35 изображена ***горизонтально проецирующая прямая***. Фронтальная проекция этой прямой перпендикулярна оси проекций x, а горизонтальная проекция — точка.

Горизонтально проецирующая прямая одновременно является фронтальной прямой уровня, поэтому отрезок ***AB*** этой прямой проецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину.

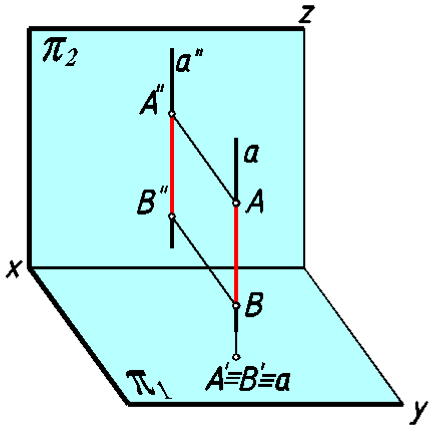


Рис. 34

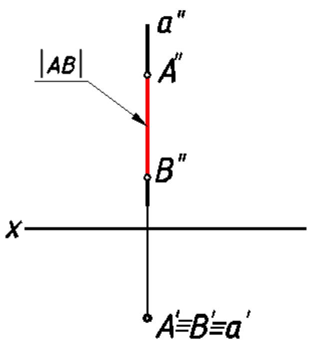


Рис. 35

На рис.36 и рис.37 изображена фронтально проецирующая прямая. Горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна оси проекций ***x***, а фронтальная проекция – точка. Фронтально проецирующая прямая одновременно является горизонтальной прямой уровня, поэтому отрезок ***AB*** этой прямой проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

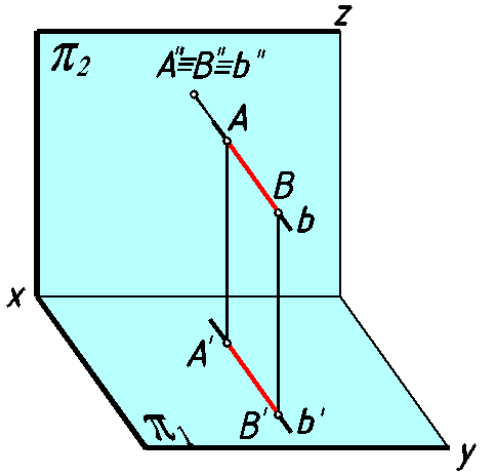


Рис. 36

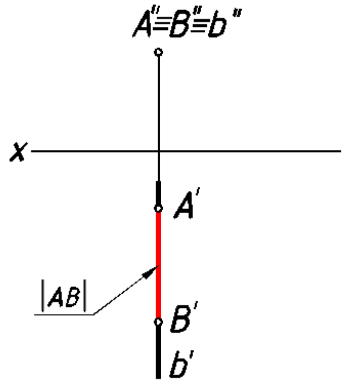


Рис. 37

На рис.38 и рис.39 изображена ***профильно проецирующая прямая***. Горизонтальная и фронтальная проекции этой прямой параллельны оси проекций ***x***, а профильная проекция — точка.

Профильно проецирующая прямая одновременно является и горизонтальной прямой уровня и фронтальной прямой уровня, поэтому отрезок ***AB*** этой прямой проецируется на горизонтальную и фронтальную плоскость проекций в натуральную величину.

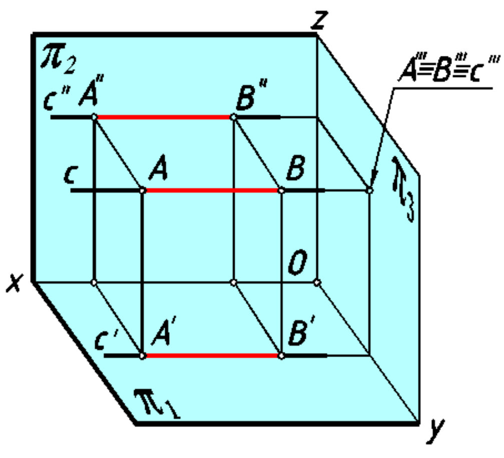


Рис. 38

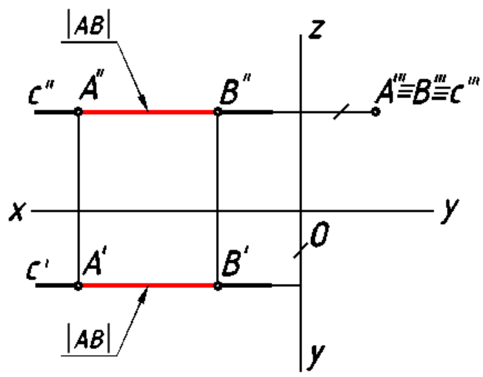


Рис. 39

Точки, лежащие на одной и той же проецирующей прямой, называют ***конкурирующими***. Их используют при определении видимости на проекциях геометрических фигур. Точки ***A*** и ***B*** на рис.35 — горизонтально конкурирующие, на рис.37 — фронтально конкурирующие, на рис.39 — профильно конкурирующие.

Вопросы для самопроверки

- *Какие прямые относятся к прямым частного положения?*
- *Какие прямые называются прямыми уровня, проецирующими?*
- *Какова особенность расположения проекций прямой уровня на чертеже?*
- *Какой информацией обладает чертеж отрезка, параллельного плоскости проекций?*
- *Какова особенность расположения проекций проецирующей прямой на чертеже?*
- *Какой информацией обладает чертеж отрезка, перпендикулярного плоскости проекций?*

§8. СЛЕДЫ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Следами прямой называют точки пересечения прямой с плоскостями проекций. Точку пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций называют ***горизонтальным следом прямой***. Точку пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций называют ***фронтальным следом прямой***. Точку пересечения прямой с профильной плоскостью проекций называют ***профильным следом прямой***. На рис.40 представлено наглядное изображение пересечения прямой с горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций.

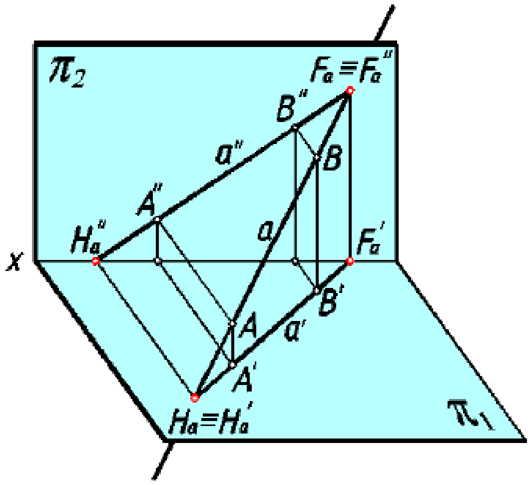


Рис. 40

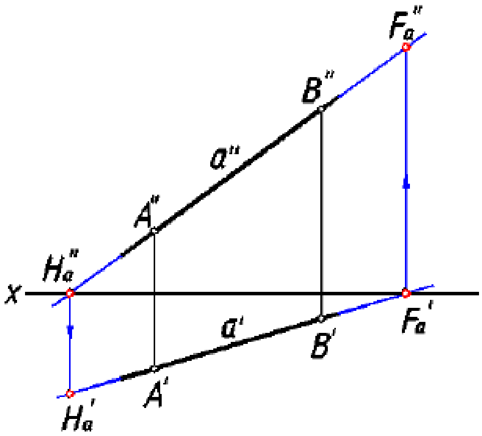


Рис. 41

Горизонтальный след прямой обозначают буквой ***H*** с индексом прямой (для прямой ***a*** — ***H_a***). Фронтальный след прямой обозначают буквой ***F*** *с* индексом прямой (для прямой ***a*** — ***F_a***).

На чертеже фронтальная проекция горизонтального следа прямой ***H_a''*** должна располагаться на фронтальной проекции прямой и на оси проекций ***x***, т. е. на их пересечении. Горизонтальная проекция фронтального следа прямой ***F_a'*** должна, в свою очередь, располагаться на горизонтальной проекции прямой и на оси проекций ***x***, т. е. на их пересечении. Вторые проекции следов прямой находятся на соответствующих проекциях прямой.

Исходя из этого можно сформулировать правила нахождения на чертеже следов прямой:

Для нахождения горизонтального следа прямой ***a*** продолжают её фронтальную проекцию до пересечения с осью проекций ***x*** в точке ***Ha"*** (фронтальная проекция горизонтального следа прямой). По фронтальной проекции находят горизонтальную проекцию ***Ha'***. Она лежит на вертикальной линии связи и на горизонтальной проекции прямой (рис.41).

Для нахождения фронтального следа прямой ***a*** продолжают её горизонтальную проекцию до пересечения с осью проекций ***x*** в точке ***F'a*** (горизонтальная проекция фронтального следа прямой). По горизонтальной проекции находят фронтальную проекцию ***Fa"***. Она лежит на вертикальной линии связи и на фронтальной проекции прямой (рис.41).

Следы прямой дают возможность задавать прямую, так как две точки прямой определяют её положение в пространстве. С помощью следов прямой можно установить, через какие четверти пространства проходит данная прямая.

Если прямая профильная, её следы находят с помощью профильной проекции прямой (рис.42). Правда, можно обойтись и без профильной проекции прямой, а использовать пропорциональное деление отрезка прямой в заданном отношении.

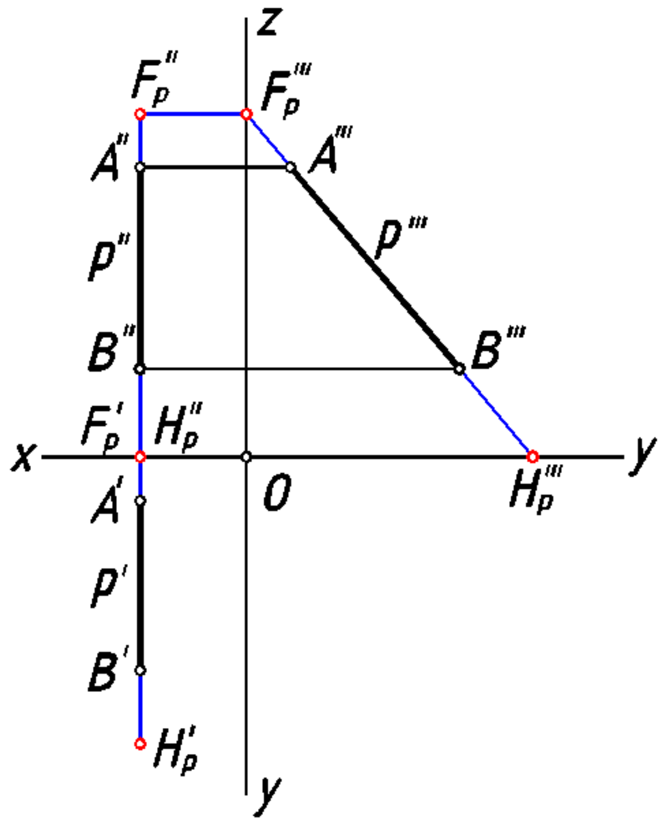


Рис. 42

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Что называется следами прямой линии?*
- *Как на чертеже прямой линии построить проекции ее следов?*

§9. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Основываясь на втором инвариантном свойстве, можно говорить о том, что если точка принадлежит прямой, то её проекции принадлежат одноимённым проекциям этой прямой.

Можно сделать и обратный вывод: если на чертеже проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой и лежат на одной вертикальной линии связи, то такая точка принадлежит этой прямой:

$$B \in a \Leftrightarrow B' \in a' \wedge B'' \in a''$$

Из пяти точек, заданных на рис.43, прямой ***a*** принадлежит только точка А.

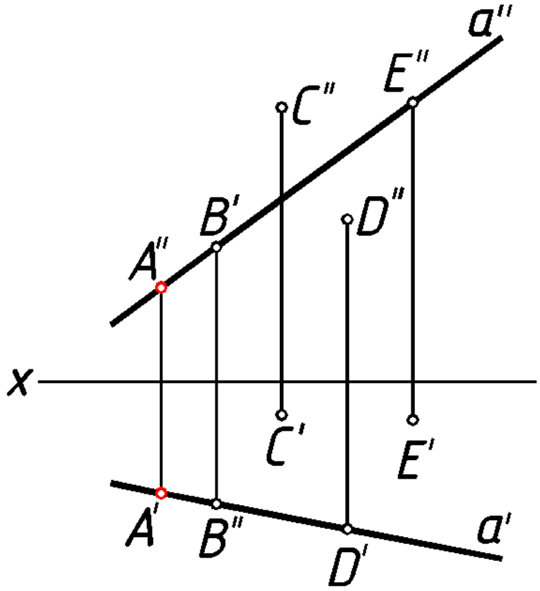


Рис. 43

Для случая профильной прямой необходимо сделать уточнение. Чтобы определить принадлежность точки профильной прямой, необходимо проверить принадлежность профильной проекции точки профильной проекции прямой или использовать пропорциональное деление.

На рис.44 и рис.45 приведено решение задачи, где нужно по заданной фронтальной проекции точки ***C***, принадлежащей профильной прямой, найти её горизонтальную проекцию.

На рис.44 для решения задачи построена профильная проекция заданной прямой, на которой найдена проекция точки ***C'''*** Измерив координату ***y*** точки, её откладывают на горизонтальной проекции прямой, где отмечают горизонтальную проекцию точки ***C'***.

На рис.45 для решения задачи использовано пропорциональное деление отрезков. Решение задачи сводится к тому, чтобы на горизонтальной проекции отрезка ***AB*** найти точку, которая делит эту проекцию в том же отношении, в котором фронтальная проекция этой точки делит фронтальную проекцию отрезка. Для этого через горизонтальную проекцию точки ***A*** проводят под произвольным углом луч, на котором откладывают отрезки ***AC = A''C''*** и ***CB = C''B''***. После этого соединяют точки ***B*** и ***B'*** отрезком прямой и через точку ***C*** проводят отрезок ***CC'***, параллельный отрезку ***BB'***.

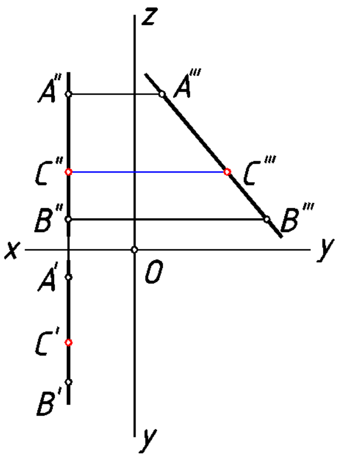


Рис. 44

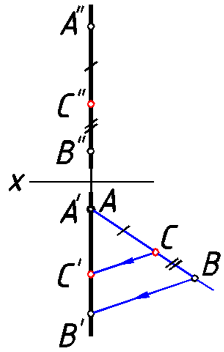


Рис. 45

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Что на чертеже является признаком принадлежности точки прямой линии?*
- *Как задать точку, принадлежащую профильной прямой?*

§10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ И УГЛОВ НАКЛОНА ЕГО К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Отрезок прямой общего положения проецируется с искажением. Длина проекции зависит от угла наклона его к плоскости проекций. Однако, если заданы проекции отрезка, то его длину и углы наклона к плоскостям проекций можно определить с помощью дополнительных построений.

На рис.46 представлен отрезок ***AB*** и его горизонтальная проекция ***A'B'***.

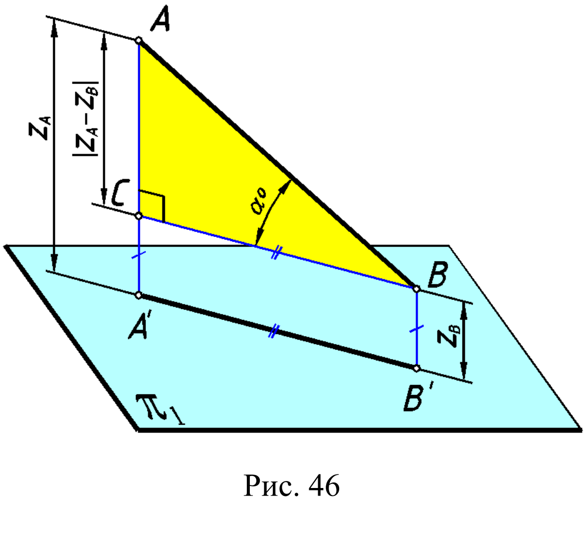


Рис. 46

Проведем через точку ***B*** прямую ***BC*** параллельно горизонтальной проекции отрезка. В треугольнике ***ABC*** угол ***ACB*** равен 90°, гипотенуза ***AB*** является самим отрезком, а катет ***BC*** равен по величине горизонтальной проекции ***A'B'*** отрезка. Второй катет ***AC*** равен по величине разности координат ***z*** концов отрезка прямой ***AB***:

$$|AC| = |AA'| - |A'C|, \text{ где } |A'C| = |BB'|$$

Угол ***ABC*** равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций (углу α^o).

При аналогичном проецировании на фронтальную плоскость проекций мы получим прямоугольный треугольник, у которого одним катетом будет отрезок, равный по величине фронтальной проекции отрезка, а вторым катетом — отрезок, равный по величине разности координат y концов отрезка. В полученном прямоугольном треугольнике угол наклона гипотенузы к катету, равному проекции отрезка, равен по величине углу β^o — углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций.

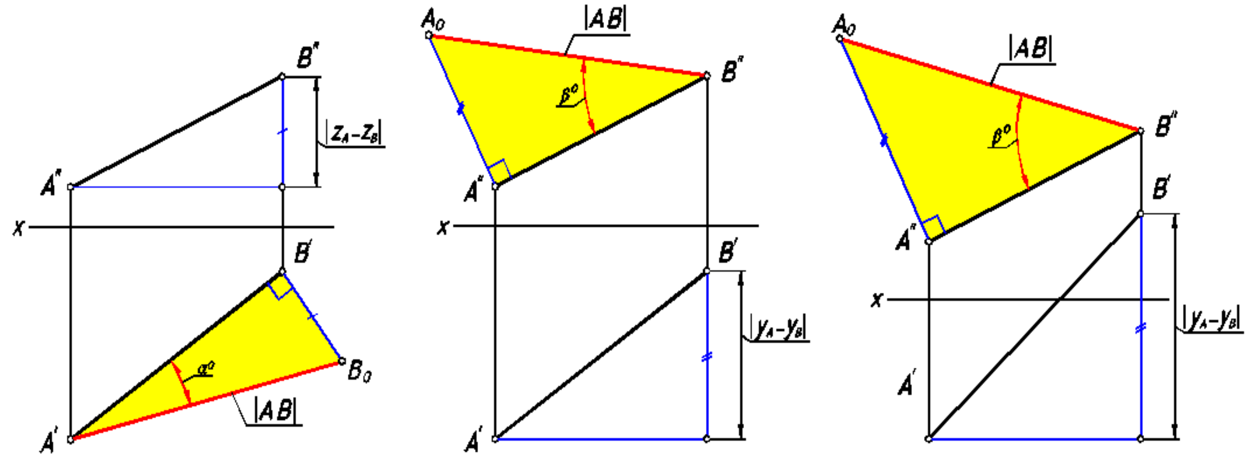
Теперь можно сформулировать правило определения длины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций:

Для определения длины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций необходимо построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого является отрезок, равный по величине горизонтальной (фронтальной) проекции отрезка, а вторым катетом — отрезок, равный по величине алгебраической разности координат z (y) концов отрезка прямой. Гипотенуза построенного прямоугольного треугольника равна по величине отрезку прямой, а угол между гипотенузой и катетом, равным проекции отрезка, равен углу наклона отрезка к соответствующей плоскости проекций (рис.47).

Если при построении за один из катетов прямоугольного треугольника взят отрезок, равный по величине горизонтальной проекции отрезка, то угол между этим отрезком и гипотенузой прямоугольного треугольника определяет величину угла α^o — угла наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций (рис.47а).

Если при построении за один из катетов прямоугольного треугольника взят отрезок, равный по величине фронтальной проекции отрезка, то угол между этим отрезком и гипотенузой прямоугольного треугольника определяет величину угла β^o — угла наклона прямой к фронтальной плоскости проекций (рис.47б).

В приведенном правиле следует обратить внимание на выражение «алгебраическая разность координат», т.е. разность с учетом знаков координат. На рис.47 в координата y конца A отрезка положительна, а координата y конца B отрицательна. Следовательно, абсолютная величина разности этих координат будет равна сумме их величин.



а) б) в)

Рис. 47

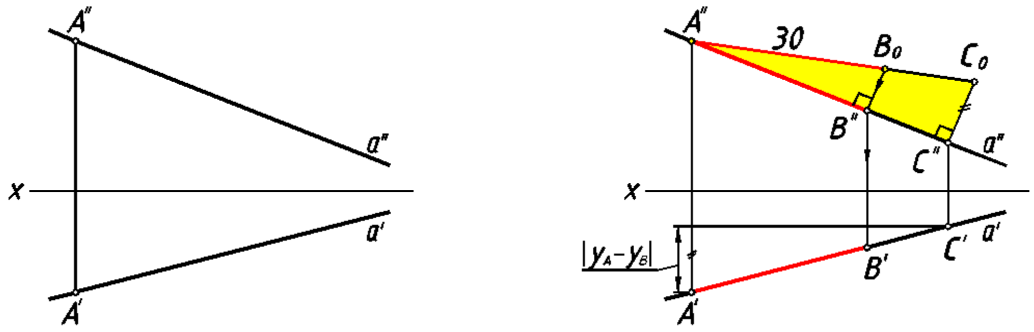
Вопросы для самопроверки

- *Сформулируйте правило определения длины отрезка прямой общего положения и углов наклона его к плоскостям проекций?*
- *На какой проекции следует строить прямоугольный треугольник для определения угла наклона его к горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций?*

§11. ПОСТРОЕНИЕ ОТРЕЗКА ЗАДАННОЙ ДЛИНЫ НА ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

На основании второго свойства ортогонального проецирования известно, что если точка делит отрезок прямой в каком-то отношении, то проекции этой точки делят одноименные проекции отрезка прямой в таком же отношении.

Эту закономерность мы используем при решении задачи, в которой требуется на прямой $\boldsymbol{a}$ от точки $\boldsymbol{A}$ отложить отрезок заданной длины 30 мм (рис.48а).



а) б)

Рис. 48

Решение сводится к следующему (рис.48б). Ограничиваем прямую произвольной точкой $\boldsymbol{C}$. Построив прямоугольный треугольник, определяем длину отрезка $\boldsymbol{AC}$ и на ней от точки $\mathbf{A''}$ откладываем отрезок, равный по величине отрезку заданной длины (отрезок $\boldsymbol{A''Bo}$ = 30мм). Точка $\boldsymbol{Bo}$ делит отрезок $\boldsymbol{A''Co}$ в каком-то отношении. Проекции точки $\boldsymbol{B}$ будут делить одноименные проекции отрезка $\boldsymbol{AC}$ в таком же отношении. Это дает возможность построить проекции искомой точки $\boldsymbol{B}$. Из точки $\boldsymbol{B_O}$ опускаем перпендикуляр на $\boldsymbol{a''}$ и находим фронтальную проекцию $\boldsymbol{B''}$ точки $\boldsymbol{B}$. Проведя линию связи, находим горизонтальную проекцию $\boldsymbol{B'}$ точки $\boldsymbol{B}$.

Вопросы для самопроверки

- *Какова последовательность построения отрезка заданной длины на прямой общего положения?*

§12. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

Две прямые в пространстве могут быть пересекающимися, параллельными и скрещивающимися.

Пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку. На основании второго инвариантного свойства одноимённые проекции пересекающихся прямых должны пересекаться, и точки их пересечения должны быть проекциями точки пересечения этих прямых (должны лежать на одном перпендикуляре к оси проекций $\boldsymbol{x}$).

Действительно и обратное утверждение. Если на чертеже одноимённые проекции прямых пересекаются и точки их пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси проекций $\boldsymbol{x}$, то такие прямые — пересекающиеся (рис. 49):

$$(a \cap b = K) \wedge (a \nparallel \pi_3) \wedge (b \nparallel \pi_3) \Leftrightarrow (a' \cap b' = K') \wedge (a'' \cap b'' = K'')$$

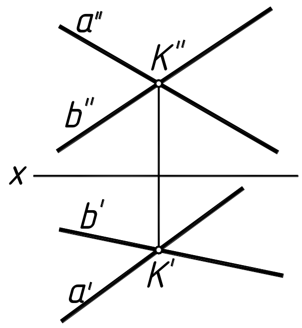


Рис. 49

Здесь необходимо сделать замечание. Если одна из прямых — профильная, то для решения вопроса о пересекаемости прямых необходимо проверить, пересекаются ли профильные проекции прямых и существует ли проекционная связь между проекциями точки пересечения этих прямых (рис.50). На чертеже видно, что заданные прямые не являются пересекающимися, т.к. точка $\boldsymbol{K}$, принадлежащая прямой общего положения $\boldsymbol{l}$, не принадлежит профильной прямой $\boldsymbol{AB}$.

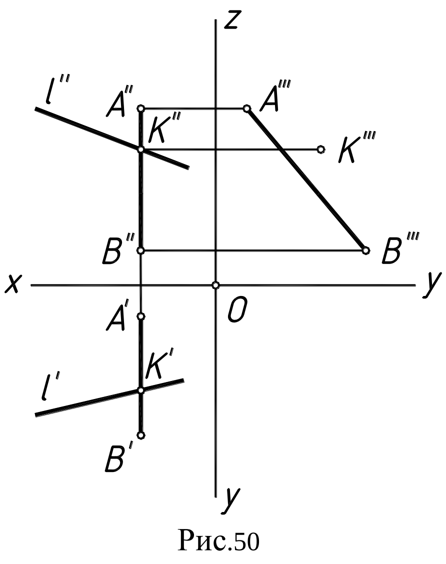


Рис.50

Параллельные прямые лежат в одной плоскости и не имеют общей точки (пересекаются в несобственной точке).

На основании второго инвариантного свойства одноименные проекции параллельных прямых должны быть параллельными (рис.51):

$$(\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{\pi_3}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a'} \parallel \boldsymbol{b'}) \wedge (\boldsymbol{a''} \parallel \boldsymbol{b''})$$

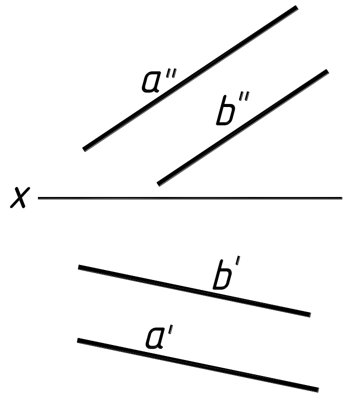


Рис. 51

Можно утверждать и обратное. Если на чертеже одноимённые проекции прямых параллельны, то такие прямые параллельны. Здесь, однако, надо сделать замечание, что если прямые профильные, то необходимо проверять параллельность профильных проекций прямых. Представленные на рис.52 прямые не параллельны, так как у них не параллельны профильные проекции.

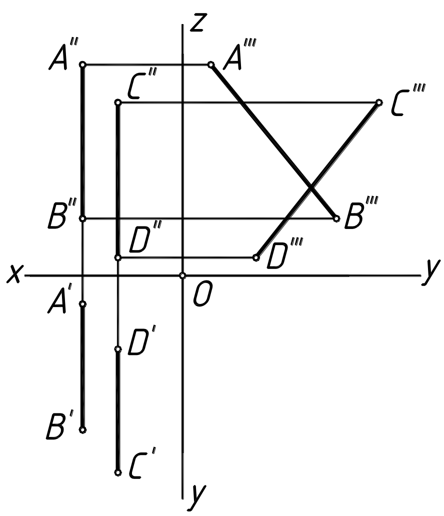


Рис. 52

Можно оценить параллельность прямых, проверив, лежат ли точки ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** в одной плоскости (рис.53). Для этого через противоположные концы заданных отрезков проведем прямые. Если они окажутся пересекающимися или параллельными, то точки ***A***, ***B***, ***C*** и ***D*** лежат в одной плоскости и значит заданные профильные прямые параллельны. На представленном чертеже профильные прямые непараллельны.

В некоторых случая можно оценить параллельность профильных прямых по чередованию обозначений концов заданных отрезков. Например, на рис.54, если читать сверху, у отрезка ***AB*** чередование одинаковое (***A-B-A-B***), а у отрезка ***CD*** противоположное (***C-D-D-C***). Это означает, что отрезки ***AB*** и ***CD*** не параллельные, а скрещивающиеся. В пространстве они расположены так, как показано на рис.55. Отрезок ***AB*** называется восходящим, а ***CD*** — нисходящим.

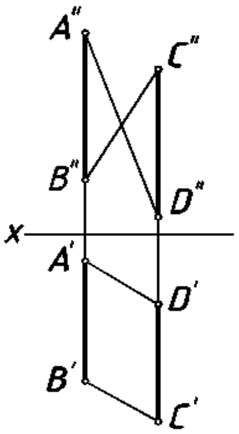


Рис. 53

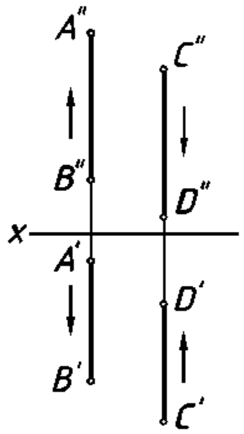


Рис. 54

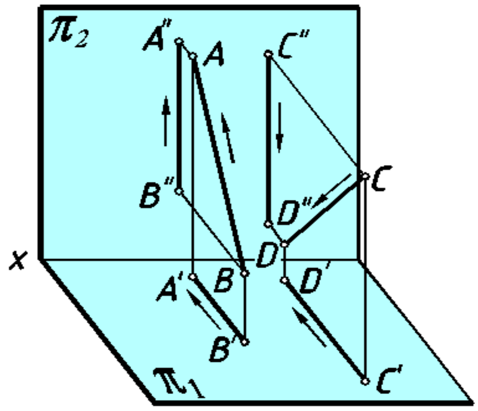


Рис. 55

Скрещивающиеся прямые линии изображены на рис.56. Прямые ***a*** и ***b*** не имеют общих точек и не параллельны. Хотя горизонтальные и фронтальные проекции прямых пересекаются, но точки их пересечения не лежат на одной вертикальной линии связи.

Для определения видимости точек используют ***конкурирующие точки***. На рис.56 две пары таких точек: фронтально конкурирующие точки ***1*** и ***2*** и горизонтально конкурирующие ***3*** и ***4***.

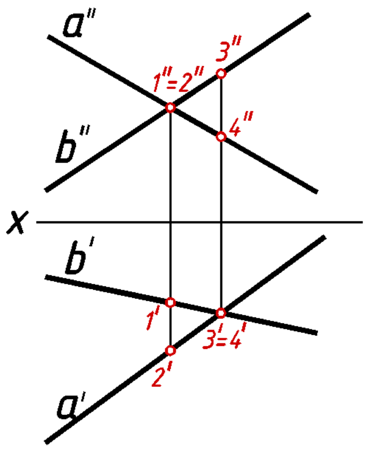


Рис.56

Точка ***2***, лежащая на прямой ***a***, находится дальше от фронтальной плоскости проекций, чем точка ***1*** прямой ***b*** ($y_2 > y_1$). Поэтому на фронтальной плоскости проекций она будет «закрывать» собой точку ***1*** (наблюдателю будет видна точка ***2*** и не видна точка ***1***). Сравнивая относительное расположение точек ***3*** и ***4***, приходим к выводу, что на горизонтальной плоскости проекций точка ***3***, принадлежащая прямой ***b***, закрывает собой точку ***4***, лежащую на прямой ***a*** ($z_3 > z_4$).

Вопросы для самопроверки

- *Каким может быть взаимное положения прямых?*
- *Как на чертеже располагаются проекции пересекающихся, параллельных и скрещивающихся прямых?*
- *Почему для профильных прямых вопрос о взаимном их положении следует решать на профильной плоскости проекций?*
- *Как решить вопрос о взаимном положении профильных прямых, не строя их профильные проекции?*
- *Какие точки называются конкурирующими, для чего их используют?*

Глава III

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

§13. ЗАДАНИЕ ПЛОСКОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

На чертеже плоскость задают проекциями некоторых геометрических фигур, принадлежащих этой плоскости:

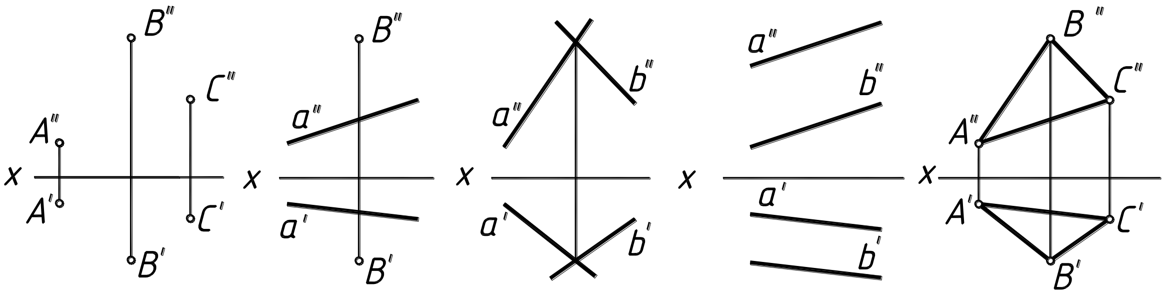
а) проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис.57а);

б) проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой (рис.57б);

в) проекциями двух пересекающихся прямых; (рис.57в)

г) проекциями двух параллельных прямых (рис.57г);

д) проекциями любой плоской геометрической фигуры (треугольника, квадрата, прямоугольника, трапеции и т.д.) (рис.57д).



а) б) в) г) д)

Рис. 57

От одного способа задания плоскости можно легко перейти к другому. Например, если плоскость задана тремя точками, можно через любые из двух заданных точек провести прямую и перейти к способу задания этой же плоскости прямой и точкой, а если через любые две пары заданных точек провести прямые, то та же плоскость будет задана пересекающимися прямыми и т.д.

§14. СЛЕДЫ ПЛОСКОСТИ

Следами плоскости называют прямые пересечения плоскости с плоскостями проекций (рис.58).

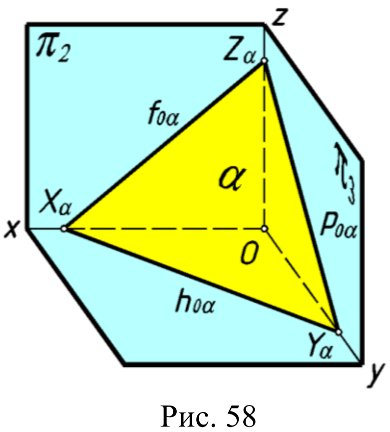


Рис. 58

Горизонтальный след плоскости $h_{0\alpha}$ — это прямая пересечения плоскости α с горизонтальной плоскостью проекций.

Фронтальный след плоскости f_{oa} — это прямая пересечения плоскости α с фронтальной плоскостью проекций.

Профильный след плоскости p_{oa} — это прямая пересечения плоскости α с профильной плоскостью проекций.

Следы плоскости обозначают как нулевую горизонталь, фронталь или профильную прямую плоскости (об этих прямых будет сказано ниже) с индексом названия плоскости. Горизонтальный след плоскости обозначают $h_{o\alpha}$,фронтальный след плоскости обозначают $f_{o\alpha}$, профильный след плоскости обозначают $p_{o\alpha}$.

Следы плоскости пересекаются в точках, принадлежащих осям проекций x, y, z, Эти точки называют ***точками схода следов*** и обозначают X_α, Y_α, Z_α, где индекс α относится к названию плоскости.

Фронтальная проекция горизонтального следа плоскости и горизонтальная проекция фронтального следа плоскости совпадают с осью проекций x и на чертеже их условно не показывают.

Плоскость удобно задавать следами. Это не новый способ задания плоскости, просто прямые, которыми задают плоскость, принадлежат не только этой плоскости, но ещё и плоскостям проекций. Это частный случай задания плоскости двумя пересекающимися прямыми.

Горизонтальная проекция горизонтального следа плоскости, фронтальная проекция фронтального следа плоскости и профильная проекция профильного следа плоскости совпадают с их собственными следами. На чертеже их условно обозначают как сам след без указания, что это проекция (рис.59). Неуказанные проекции следов плоскости находятся на осях проекций.

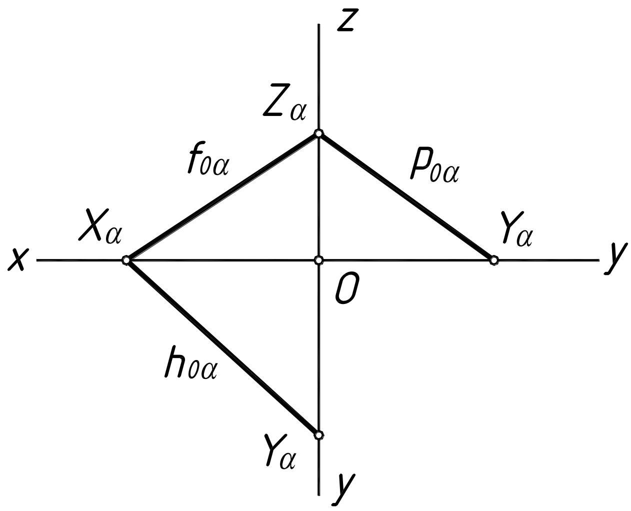


Рис. 59

Следует иметь в виду, что угол между следами плоскости общего положения на чертеже не равен действительному углу между следами и углы наклона следов к осям проекций не равны углам наклона плоскости к плоскостям проекций.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Каким образом на чертеже можно задать плоскость?*
- *Как от одного способа задания плоскости перейти к другому?*
- *Что называется следами плоскости?*
- *Как обозначают следы плоскости на чертеже?*

§15. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

15.1. Плоскости общего положения

Плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется ***плоскостью общего положения*** (рис.58). Задание такой плоскости на чертеже представлено на рисунках 57 и 59.

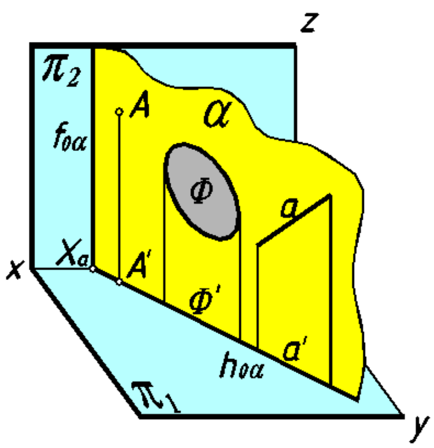
15.2. Проецирующие плоскости

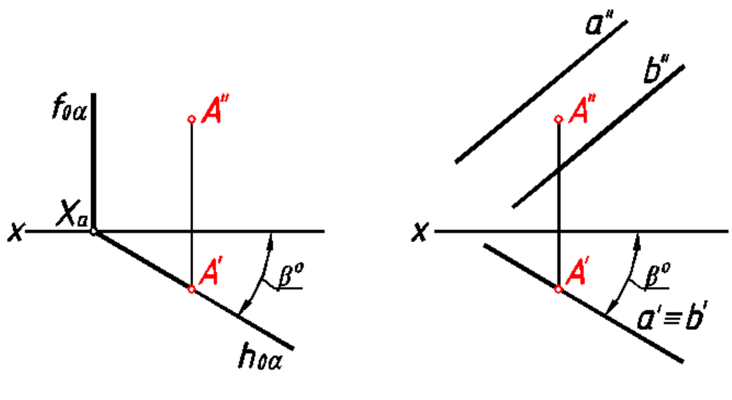
Проецирующими называются плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций.

Если плоскость перпендикулярна какой-либо плоскости проекции, то её проекция на эту плоскость вырождается в прямую, совпадающую со следом этой плоскости.

Плоскость, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций, называют ***горизонтально проецирующей*** (рис.60). На чертеже (рис.61а) её фронтальный след $f_{o\alpha}$ перпендикулярен оси проекций x, а горизонтальный след $h_{o\alpha}$ наклонен к оси x под углом β^o, равным углу наклона плоскости α к фронтальной плоскости проекций. Горизонтальные проекции всех точек, линий, геометрических фигур, принадлежащих горизонтально проецирующей плоскости, располагаются на горизонтальном следе плоскости (рис.60, 61).

На рис.61а и рис.61б задана одна и та же горизонтально проецирующая плоскость, но на рис.61а она задана следами, а на рис.61б — параллельными прямыми a и b. Точка A лежит в этой плоскости.





а) б)

Рис. 60 Рис. 61

Плоскость, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций, называют ***фронтально проецирующей*** (рис.62). На чертеже (рис.63) её горизонтальный след $h_{o\alpha}$ перпендикулярен оси проекций x, а фронтальный след $f_{o\alpha}$ наклонен к оси x под углом α^o, равным углу наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций. Фронтальные проекции всех точек, принадлежащих фронтально проецирующей плоскости, располагаются на фронтальном следе плоскости (рис.63). Фронтальные проекции всех точек, линий, геометрических фигур, принадлежащих фронтально проецирующей плоскости, располагаются на фронтальном следе плоскости (рис.62, 63).

На рис. 63а и рис.63б задана одна и та же фронтально проецирующая плоскость, но на рис.63а она задана следами, а на рис.63б — пересекающимися прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Точка $\boldsymbol{A}$ лежит в этой плоскости.

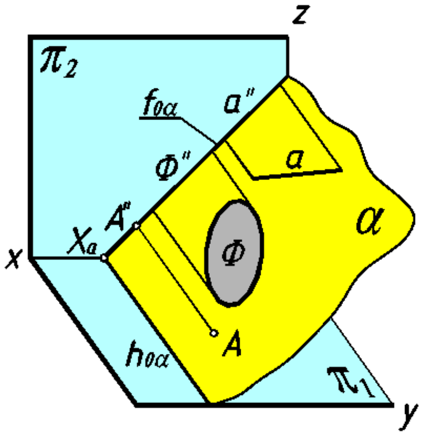
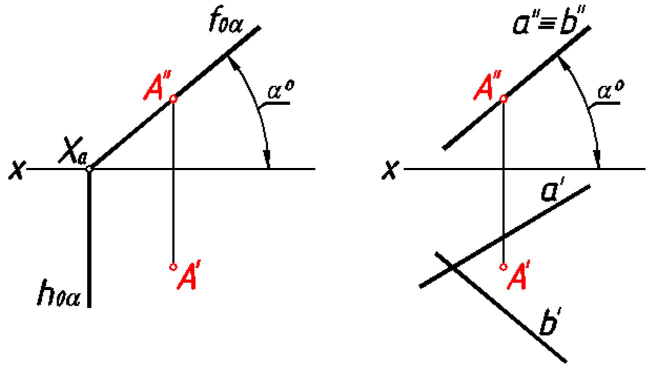


Рис. 62



а) б)

Рис. 63

Плоскость, перпендикулярную профильной плоскости проекций, называют ***профильно проецирующей*** (рис.64). На чертеже (рис.65) ее следы $\boldsymbol{h_{o\alpha}}$ и $\boldsymbol{f_{o\alpha}}$ параллельны оси проекций $\boldsymbol{x}$, а профильный след $\boldsymbol{p_{o\alpha}}$ составляет с осями $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ углы $\boldsymbol{\alpha^o}$ и $\boldsymbol{\beta^o}$, равные углам наклона плоскости к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций. Профильные проекции всех точек, принадлежащих профильно проецирующей плоскости, располагаются на ее профильном следе (рис.65).

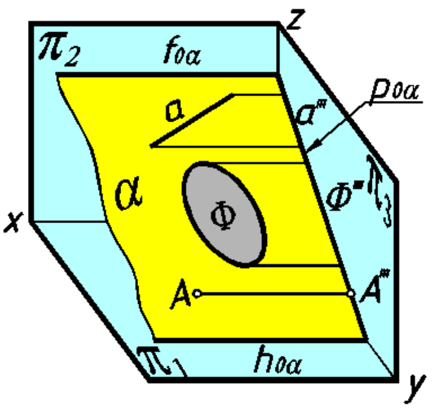


Рис. 64

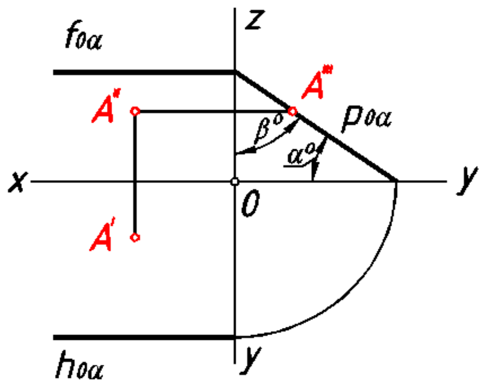


Рис. 65

15.3. Плоскости уровня

Плоскостями уровня называются плоскости, параллельные плоскостям проекций.

Следует обратить внимание, что плоскости уровня, будучи параллельны одной из плоскостей проекций, перпендикулярны двум другим плоскостям проекций, т.е. одновременно являются и проецирующими плоскостями.

Плоскость, параллельную горизонтальной плоскости проекций, называют ***горизонтальной плоскостью уровня*** (рис.66). В системе двух плоскостей проекций она имеет только один фронтальный след $\boldsymbol{f_{o\alpha}}$, который параллелен оси проекций $\boldsymbol{x}$ (рис.67).

Всякая геометрическая фигура ***Ф***, лежащая в горизонтальной плоскости уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, а на фронтальную плоскость проекций в отрезок прямой, лежащий на фронтальном следе этой плоскости.

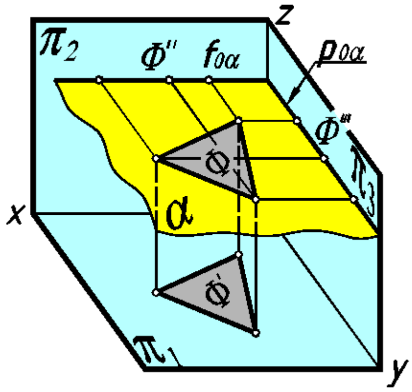


Рис. 66

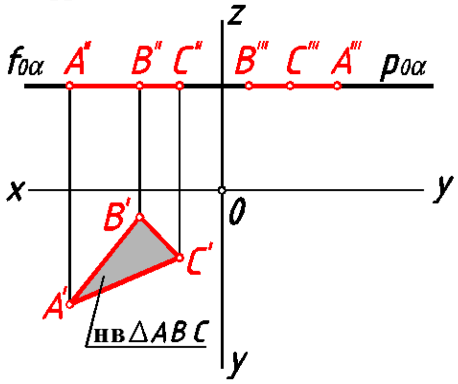


Рис. 67

Плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют ***фронтальной плоскостью уровня*** (рис.68). В системе двух плоскостей проекций она имеет только один горизонтальный след $h_{0\alpha}$, который параллелен оси проекций x (рис.69). Всякая геометрическая фигура ***Ф***, лежащая во фронтальной плоскости уровня, проецируется на фронтальную плоскость проекций без искажения, а на горизонтальную плоскость проекций в отрезок прямой, лежащий на горизонтальном следе этой плоскости.

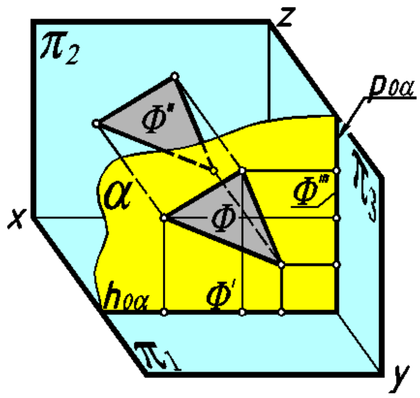


Рис. 68

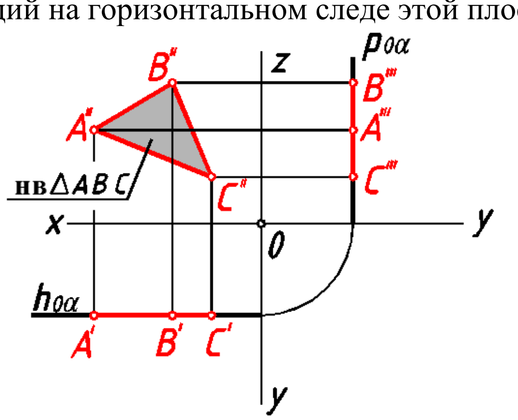


Рис. 69

Плоскость, параллельную профильной плоскости проекций, называют ***профильной плоскостью уровня*** (рис.70). Горизонтальная и фронтальная проекции такой плоскости совпадают с её следами, перпендикулярными оси x. На проекционном чертеже следы располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси x (рис.71).

Всякая геометрическая фигура ***Ф***, лежащая в профильной плоскости уровня, проецируется на профильную плоскость проекций без искажения, а на горизонтальную и фронтальную плоскости проекций в отрезки прямой, лежащие на следах этой плоскости.

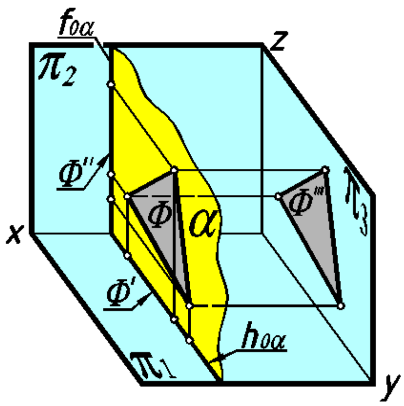


Рис. 70

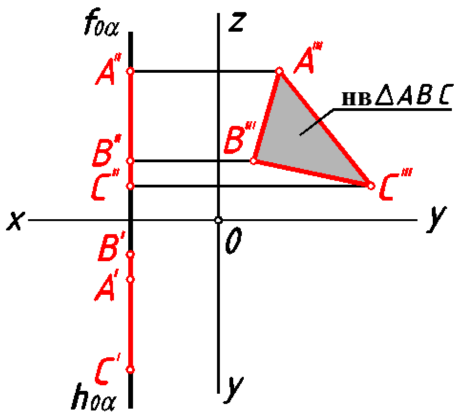


Рис. 71

Вопросы для самопроверки

- *Какая плоскость называется плоскостью общего положения, проецирующей, уровня?*
- *Как на чертеже располагаются следы проецирующей плоскости?*
- *Каким свойством обладает проецирующая плоскость?*
- *Как на чертеже располагаются следы плоскости уровня?*
- *Какими свойствами обладает плоскость уровня?*

§16. ПРЯМАЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПЛОСКОСТИ

***Признак принадлежности точки плоскости*:** точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

***Признаки принадлежности прямой плоскости*:** прямая принадлежит плоскости, если:

1) она имеет с плоскостью две общие точки;
2) она имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости.

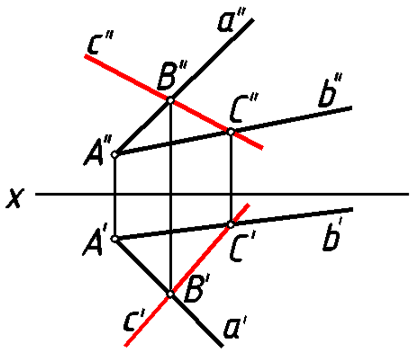


Рис. 72

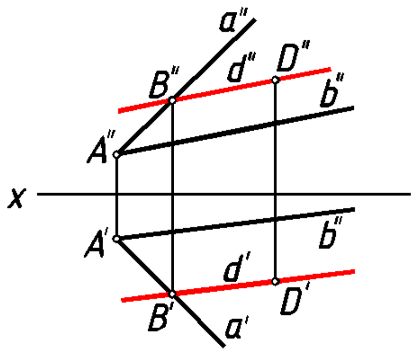


Рис. 73

На рис.72 плоскость задана пересекающимися прямыми ***a*** и ***b***. Точки ***A***, ***B*** и ***C*** принадлежат этой плоскости, т.к. принадлежат прямым, задающим плоскость. Прямая ***c*** принадлежит плоскости, т.к. проходит через две точки ***B*** и ***C***, принадлежащие плоскости.

На рис.73 прямая ***d*** принадлежит плоскости заданной пересекающимися прямыми ***a*** и ***b***, т.к. она проходит через точку ***B***, принадлежащую плоскости, и параллельна прямой ***b***, лежащей в этой плоскости. Точка ***D*** лежит в заданной плоскости, т.к. принадлежит прямой ***d***, лежащей в этой плоскости.

Следы прямой линии, лежащей в плоскости, находятся на следах этой плоскости (рис.74). Это обстоятельство используют при построении проекций прямой, принадлежащей плоскости, заданной следами (рис.75).

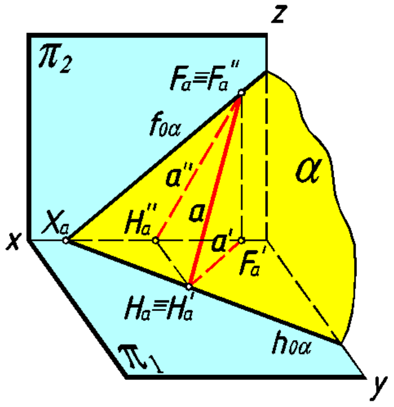


Рис. 74

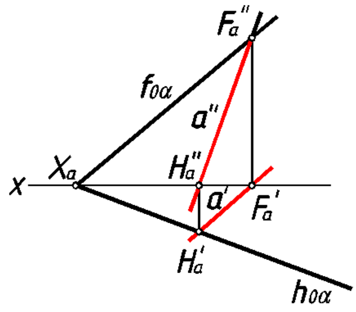


Рис. 75

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Сформулируйте признак принадлежности точки плоскости.*
- *Сформулируйте признаки принадлежности прямой плоскости.*
- *Как построить проекции точки, принадлежащей плоскости?*
- *Как построить проекции прямой, принадлежащей плоскости?*
- *Как построить проекции прямой, принадлежащей плоскости, заданной следами?*

§17. ЛИНИИ ОСОБОГО ПОЛОЖЕНИЯ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПЛОСКОСТИ

К прямым, занимающим особое положение, относятся: горизонталь плоскости, фронталь плоскости, линия наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций.

Горизонталью плоскости называется прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис.76).

Фронтальная проекция горизонтали плоскости параллельна оси проекций $\boldsymbol{x}$, а горизонтальная проекция параллельна горизонтальному следу плоскости (рис.77, 78).

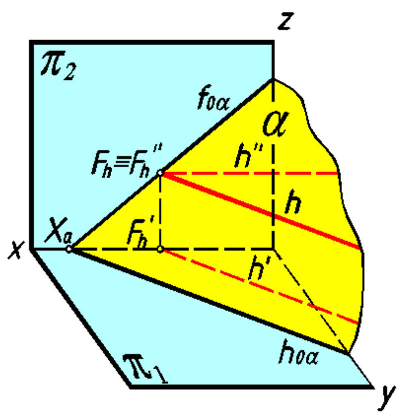


Рис. 76

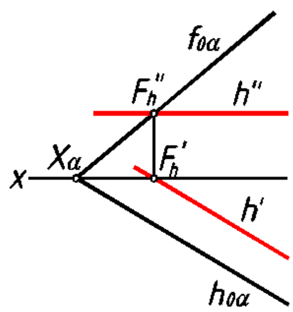


Рис. 77

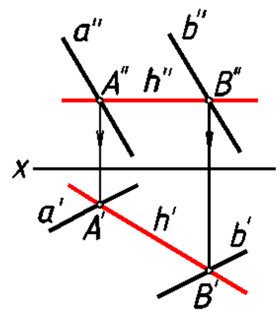


Рис. 78

Фронталью плоскости называется прямая, принадлежащая данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (рис.79). Горизонтальная проекция фронтали плоскости параллельна оси проекций $\boldsymbol{x}$, а фронтальная проекция — параллельна фронтальному следу плоскости (рис.80, 81).

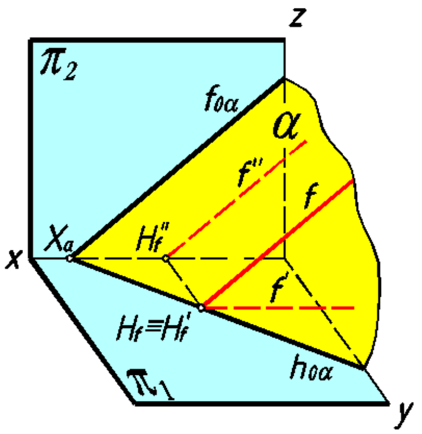


Рис. 79

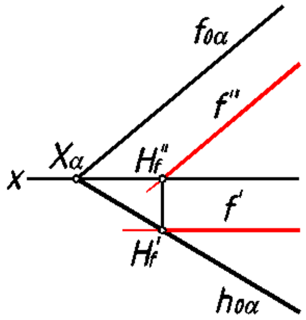


Рис. 80

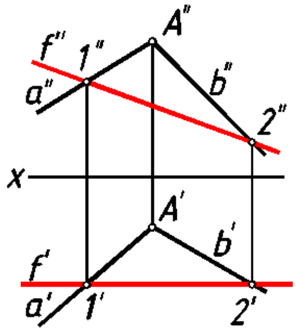


Рис. 81

Через любую точку плоскости общего положения можно провести две прямые, из которых одна будет наклонена к горизонтальной плоскости проекций под углом $\boldsymbol{\alpha^o}$, равным углу наклона самой плоскости к горизонтальной плоскости проекций, а другая прямая будет наклонена к фронтальной плоскости проекций под углом $\boldsymbol{\beta^o}$, равным углу наклона самой плоскости к фронтальной плоскости проекций. Эти прямые называют ***линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций***.

Рассмотрим линию наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций, её ещё называют ***линией ската*** (прямая $\boldsymbol{a}$ на рис.82).

Величину двугранного угла между плоскостями определяют величиной линейного острого угла между прямыми, принадлежащими этим плоскостям, и перпендикулярными прямой пересечения плоскостей,

В данном примере прямой пересечения плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ с горизонтальной плоскостью проекций является горизонтальный след $\boldsymbol{h_{o\alpha}}$ плоскости $\boldsymbol{\alpha}$. Прямая $\boldsymbol{a}$ принадлежит плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и перпендикулярна $\boldsymbol{h_{o\alpha}}$.

Горизонтальная проекция $\boldsymbol{a'}$ прямой $\boldsymbol{a}$ принадлежит плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ и перпендикулярна $\boldsymbol{h_{o\alpha}}$.

Следовательно, линией наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций является прямая, принадлежащая этой плоскости и перпендикулярная горизонтальному следу плоскости или произвольным горизонталям этой плоскости.

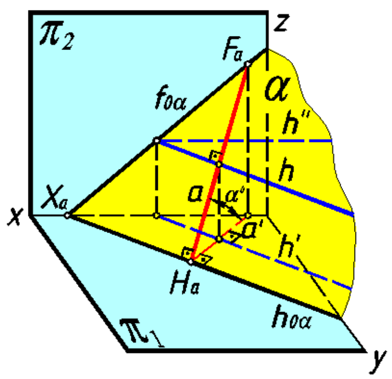


Рис. 82

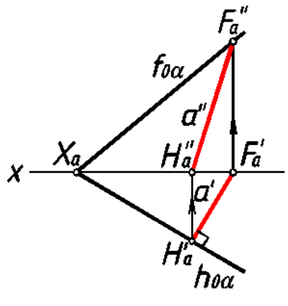


Рис. 83

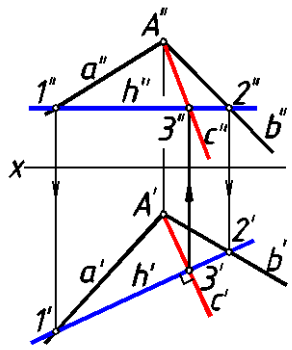


Рис. 84

Из теоремы о частном случае проецирования прямого угла следует, что горизонтальная проекция линии наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций составляет с горизонтальной проекцией произвольной горизонтали этой плоскости (и с горизонтальным следом плоскости) угол, равный 90°.

Фронтальная проекция линии наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций может занимать различные положения в зависимости от положения плоскости.

На рис.83 и 84 показан чертёж линии наибольшего наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций (прямая ***a***).

Линией наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций является прямая, принадлежащая этой плоскости и перпендикулярная фронтальному следу плоскости (прямая ***a*** на рис.85) или произвольным фронталям этой плоскости (прямая ***c*** на рис.86).

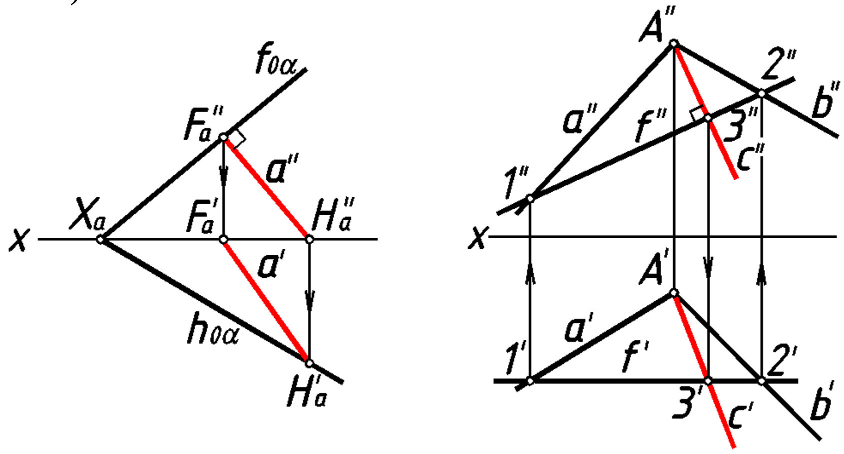


Рис. 85 Рис. 86

Для определения угла наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций следует построить линию наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций, как показано на рис.83 и рис.84, а затем построить прямоугольный треугольник на горизонтальной проекции этой линии для определения угла наклона ее к горизонтальной плоскости проекций.

Для определения угла наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций следует построить линию наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций, как показано на рис.85 и рис.86, а затем построить прямоугольный треугольник на фронтальной проекции этой линии для определения угла наклона ее к фронтальной плоскости проекций.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какие прямые, принадлежащие плоскости, относятся к линиям особого положения?*
- *Какая прямая называется горизонталью плоскости, фронталью плоскости?*
- *Каково взаимное положение следов плоскости и ее линий уровня?*
- *Как в плоскости задать произвольную горизонталь (фронталь)?*
- *Какие прямые плоскости называются линиями наибольшего наклона?*
- *Как построить линию наибольшего наклона плоскости, заданной следами, и заданной не следами?*
- *Как определить угол наклона плоскости к плоскостям проекций с помощью линий наибольшего наклона?*

§18. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

18.1. Параллельность прямой и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости: если плоскость содержит в себе прямую, параллельную данной, то данная прямая и плоскость взаимно параллельны (рис.87).

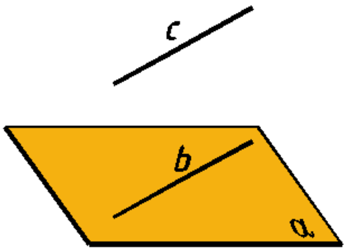


Рис. 87

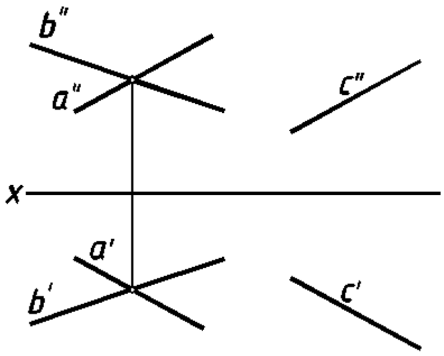


Рис. 88

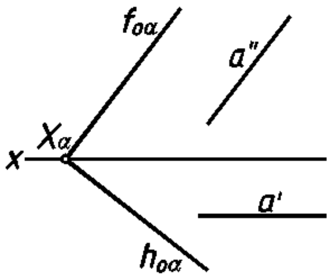


Рис. 89

На рис.88 прямая ***c*** и плоскость, заданная прямыми ***b*** и ***c***, взаимно параллельны, т.к. прямая *c* параллельна прямой ***a***, лежащей в плоскости.

На рис.89 прямая ***a*** и плоскость, заданная следами, взаимно параллельны, т.к. прямая ***a*** параллельна фронтальному следу плоскости.

18.2. Параллельность двух плоскостей

Признак параллельности плоскостей: если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, принадлежащим другой плоскости, то такие плоскости взаимно параллельны (рис.90).

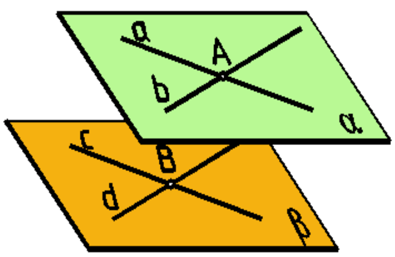


Рис. 90

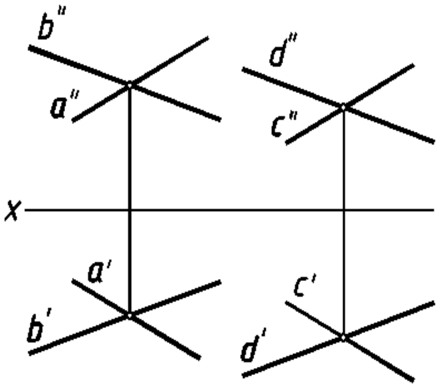


Рис. 91

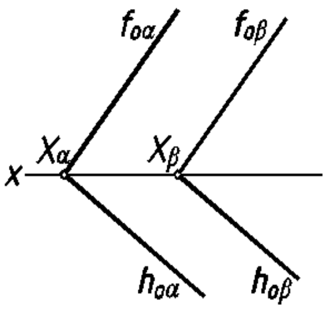


Рис. 92

На рис.91 плоскости, заданные пересекающимися прямыми, взаимно параллельны, т.к. прямые, задающие плоскости, попарно параллельны.

На рис.92 плоскости, заданные следами, взаимно параллельны, т.к. одноименные следы этих плоскостей параллельны.

18.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим данной плоскости.

На чертеже в качестве пересекающихся прямых плоскости выбирают произвольные горизонтали и фронтали этой плоскости, чтобы можно было использовать частный случай проецирования прямого угла (рис.93). Тогда ***признак перпендикулярности прямой и плоскости на чертеже*** можно сформулировать следующим образом: если горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция этой прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали этой плоскости, то такие прямая и плоскость в пространстве взаимно перпендикулярны (рис.94 и 95).

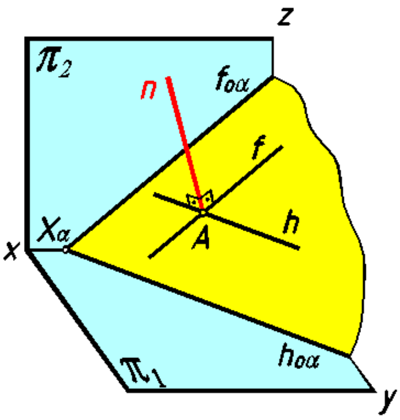


Рис. 93

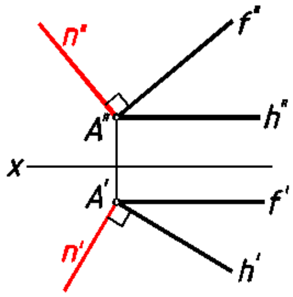


Рис. 94

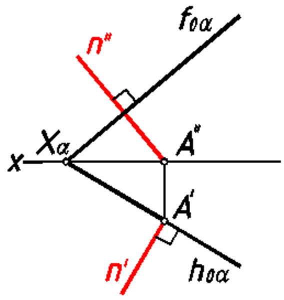


Рис. 95

На рис. 94 прямая ***n*** и плоскость, заданная горизонталью ***h*** и фронталью ***f*** взаимно перпендикулярны, т.к. $n' \perp h'$ ***и*** $n'' \perp h''$. На рис. 90 прямая ***n*** перпендикулярна плоскости, заданной следами, поскольку следы плоскости являются ее горизонталью и фронталью.

18.4. Перпендикулярность двух плоскостей

Признак перпендикулярности двух плоскостей: если одна из плоскостей содержит в себе прямую, перпендикулярную второй плоскости, то такие плоскости взаимно перпендикулярны (рис.96).

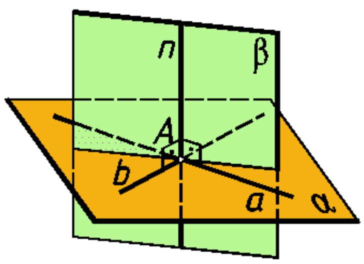


Рис. 96

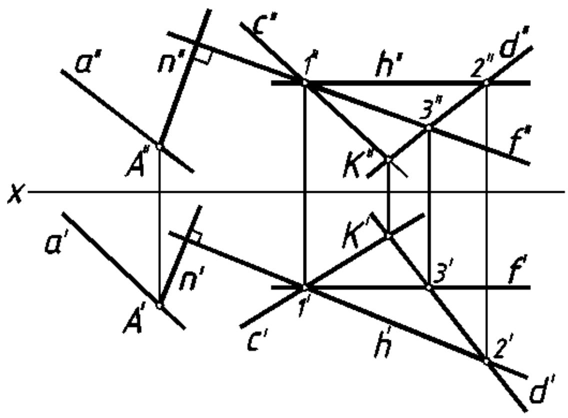


Рис. 97

На рис.97 плоскость, заданная прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярна плоскости, заданной прямыми $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, т.к. прямая $\boldsymbol{n}$ перпендикулярна горизонтали $\boldsymbol{h}$ и фронтали $\boldsymbol{f}$ плоскости, заданной прямыми $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$.

Вопросы для самопроверки

- *Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.*
- *Как на чертеже задать прямую, параллельную заданной плоскости?*
- *Как на чертеже задать плоскость, параллельную заданной прямой?*
- *Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей?*
- *Как на чертеже задать две параллельные плоскости?*
- *Как на чертеже располагаются следы параллельных плоскостей?*
- *Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости?*
- *Как на чертеже задать прямую, перпендикулярную плоскости?*
- *Как на чертеже задать плоскость, перпендикулярную заданной прямой?*
- *Как располагаются проекции прямой, перпендикулярной плоскости, заданной следами?*
- *Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей?*
- *Как заключить прямую в плоскость, перпендикулярную заданной плоскости?*

Глава IV
СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

Определение метрических характеристик изображаемых фигур, а также определение по ортогональным проекциям взаимного расположения заданных геометрических элементов значительно упрощается при частном их расположении относительно плоскостей проекций.

В этой связи, при решении многих позиционных и метрических задач с целью упрощения их решения приходится производить преобразование чертежа, на котором геометрические фигуры заданы в общем положении, в чертеж, где те же заданные фигуры занимают частное положение.

Различают два основных способа преобразования ортогонального чертежа:

1) плоскости проекций подвижны, а заданные геометрические элементы неподвижны (способ замены плоскостей проекций).

2) плоскости проекций неподвижны, а заданные геометрические элементы подвижны (способ вращения).

При применении всех способов преобразования чертежа взаимное расположение заданных геометрических фигур остаётся неизменным.

§19. СПОСОБ ЗАМЕНЫ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

Суть этого способа заключается в том, что в системе двух плоскостей проекций заменяют одну из плоскостей проекций на новую плоскость, перпендикулярную неизменяемой плоскости проекций. На эту плоскость проецируют заданные геометрические фигуры, которые в пространстве неподвижны.

Рассмотрим особенности применения способа замены плоскостей проекций на примере проецирования точки **A** (рис.98).

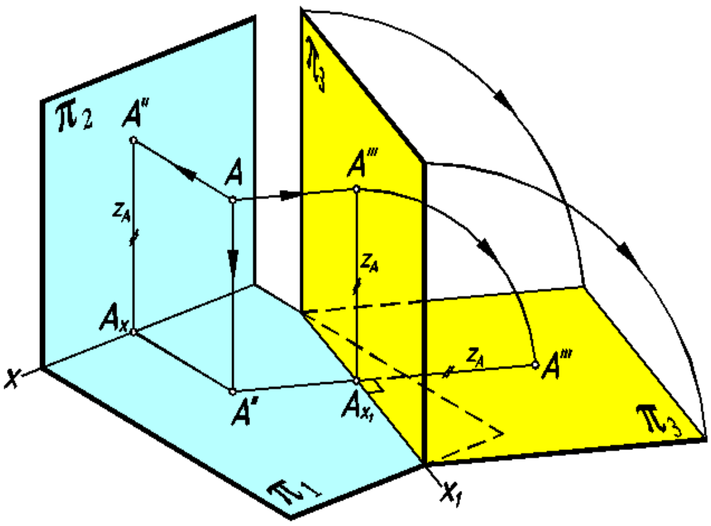


Рис. 98

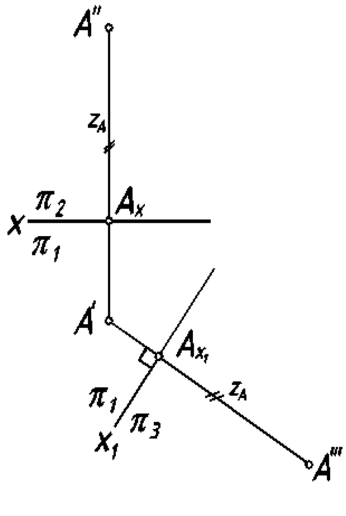


Рис. 99

В системе плоскостей проекций π_1 и π_2 задаем новую плоскость π_3 перпендикулярную плоскости π_1. Плоскость π_3 пересекает плоскость π_1 по прямой $\mathbf{x_1}$, которую принимаем за ось проекций в новой системе плоскостей проекций. Опустив перпендикуляр из точки **A** на плоскость π_3, находим ее проекцию **A‴.**

Описанная последовательность действий называется переходом от системы плоскостей проекций $x\frac{\pi_2}{\pi_1}$ к системе плоскостей проекций

.

Для получения проекционного чертежа плоскость проекций π_3 поворотом вокруг оси x_1 совмещается с плоскостью π_1.

Поскольку плоскость π_1 не изменяет своего положения, расстояние от точки A до этой плоскости не изменяется в старой и новой системах плоскостей проекций, Поэтому, координата z_A проекций точки на плоскостях π_2 и π_3 сохраняет свое значение.

На рис.99 показано, как выглядит операция замены плоскостей на проекционном чертеже. Задав новую ось проекций x_1, перпендикулярно к ней через точку A' проводим линию связи, на которой от оси x_1 откладываем координату z_A, взяв ее с плоскости π_2, отсутствующей в новой системе плоскостей проекций, и отмечаем точку A'''. Обращаем внимание на то, что рядом с обозначением осей проекций следует помещать обозначение плоскостей проекций.

Рассмотрим на нескольких примерах особенности применения способа замены плоскостей проекций, с преобразованием чертежей так, чтобы заданные геометрические фигуры заняли частное положение относительно новых плоскостей проекций.

19.1. Преобразование чертежа прямой

1) Преобразование чертежа прямой общего положения в чертеж прямой уровня

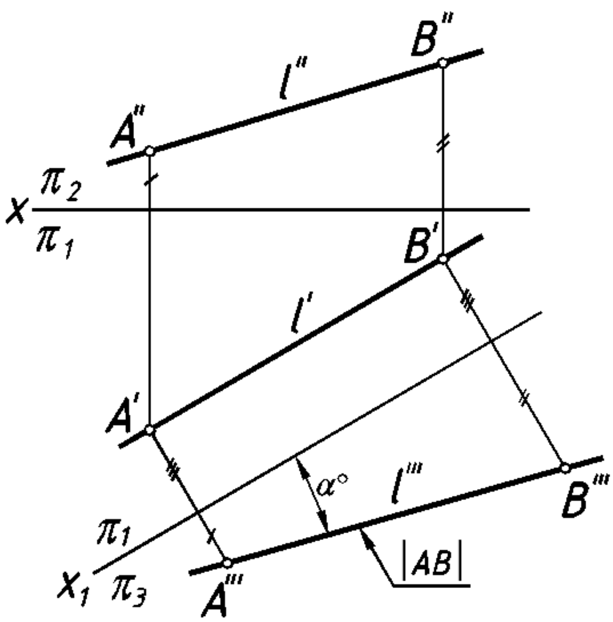


Рис.100

Известно, что у прямой уровня одна из проекций параллельна оси проекций. Поэтому, новую ось проекций x_1 проведем параллельно горизонтальной проекции прямой l'.

Возьмем на прямой две точки ***A*** и ***B***. Проведя линии связи и отложив координаты z точек ***A*** и ***B***, находим новую проекцию прямой l'''. В новой системе плоскостей проекций прямая является прямой уровня.

Такую задачу обычно решают, когда требуется определить длину отрезка прямой ***AB*** общего положения и угол наклона α° прямой к горизонтальной плоскости проекций.

2) Преобразование чертежа прямой уровня в чертеж проецирующей прямой

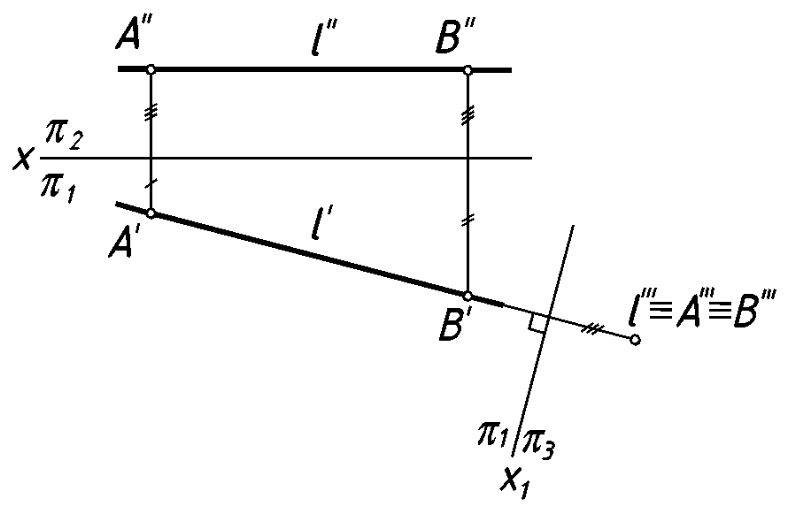


Рис. 101

Поскольку у проецирующей прямой одна из проекций перпендикулярна оси проекций, новую ось x_1 проводим перпендикулярно горизонтальной проекции заданной прямой. Т.к. координаты z точек ***A*** и ***B*** равны, то новые проекции этих точек совпадут. В эту же точку проецируется вся прямая l. Следовательно, получен чертеж проецирующей прямой (рис.101).

3) Преобразование чертежа прямой общего положения в чертеж проецирующей прямой

Решить эту задачу заменой одной плоскости проекций невозможно. Требуется последовательно произвести замену двух плоскостей проекций: сначала чертеж прямой общего положения преобразовать в чертеж прямой уровня, введя ось x_1, а затем полученный чертеж прямой уровня преобразовать в чертеж проецирующей прямой, введя ось x_2 (рис. 102).

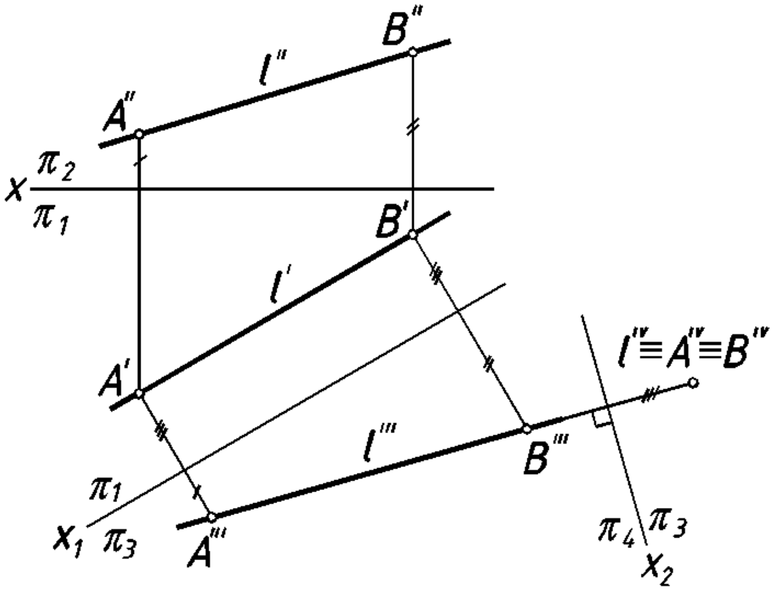


Рис. 102

19.2. Преобразование чертежа плоскости

1) Преобразование чертежа плоскости общего положения в чертеж проецирующей плоскости

На основании признака перпендикулярности плоскостей, новая плоскость проекций должна быть перпендикулярна какой-либо прямой лежащей в заданной плоскости.

Выше было показано, что одной заменой в проецирующее положение можно преобразовать только чертеж прямой уровня. Поэтому, проведем в заданной плоскости горизонталь и перпендикулярно ее горизонтальной проекции проведем новую ось x_1. На плоскость π_3 горизонталь проецируется в точку, а заданная плоскость — в отрезок прямой (рис.103).

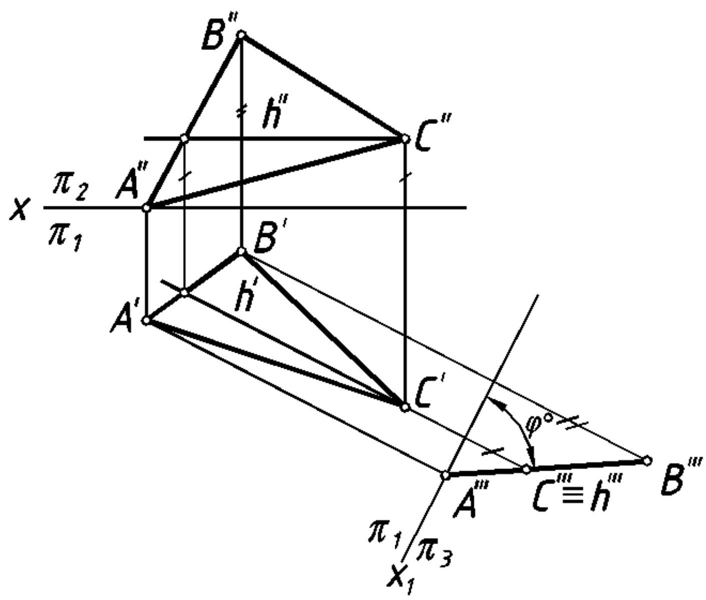


Рис. 103

Обычно такое преобразование чертежа делают для определения угла наклона плоскости общего положения к одной из плоскостей проекций. На представленном чертеже (рис.103) найден угол α° наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекций.

2) Преобразование чертежа проецирующей плоскости в чертеж плоскости уровня

У плоскости уровня одна из проекций параллельна оси проекций, поэтому новую ось проекций x_1 следует провести параллельно горизонтальной проекции треугольника ABC (рис.104).

В новой системе плоскостей проекций треугольник параллелен плоскости π_3, поэтому проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

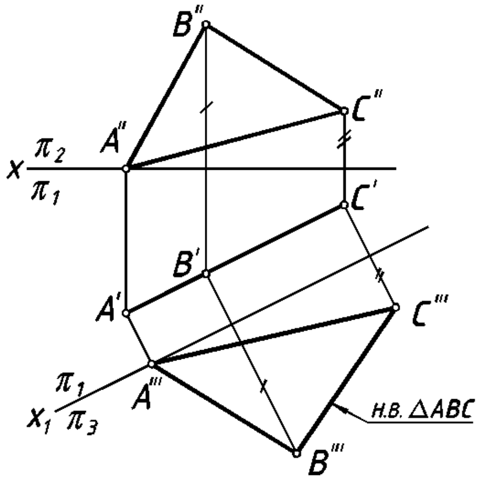


Рис. 104

3) Преобразование чертежа плоскости общего положения в чертеж плоскости уровня

Решить данную задачу заменой одной плоскости проекций не удается. Требуется последовательно произвести замену двух плоскостей проекций: сначала чертеж плоскости общего положения преобразовать в чертеж проецирующей плоскости, введя ось x_1, а затем полученный чертеж проецирующей плоскости преобразовать в чертеж плоскости уровня, введя ось x_2 (рис. 105).

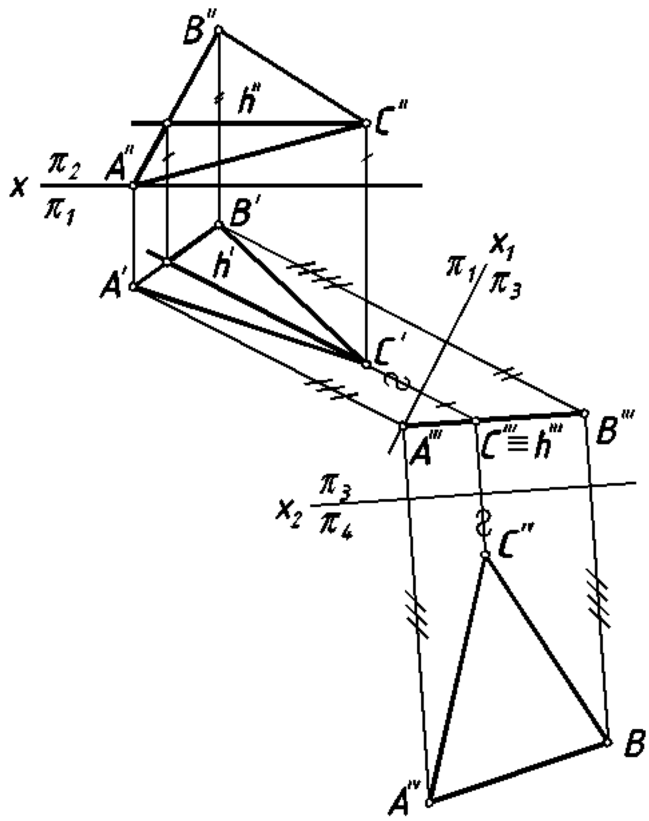


Рис. 105

Такое преобразование делают для получения натуральной величины плоской геометрической фигуры (в нашем случае — треугольника $\boldsymbol{ABC}$).

4) Преобразование чертежа плоскости общего положения, заданной следами, в чертеж проецирующей плоскости

Если плоскость задана следами и надо преобразовать чертеж так, чтобы плоскость стала перпендикулярна новой плоскости проекций (рис.106), то новую ось проекций x_1 следует провести перпендикулярно одному из ее следов. Для нахождения нового следа плоскости на плоскости π_3 мы исходим из того, что проекции всех точек, принадлежащих проецирующей плоскости, совпадают со следом этой плоскости. Возьмем точку A в плоскости α, и найдем её проекцию A''' на плоскости π_3. Через точку A''' и новую точку схода следов $F_{1\alpha}$ проводим новый след плоскости $f_{o1\alpha}$. Он наклонен к новой оси проекций x_1 под углом φ°, равным углу наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций.

Необходимо отметить, что точка A в новой системе плоскостей проекций следу $f_{o1\alpha}$ не принадлежит.

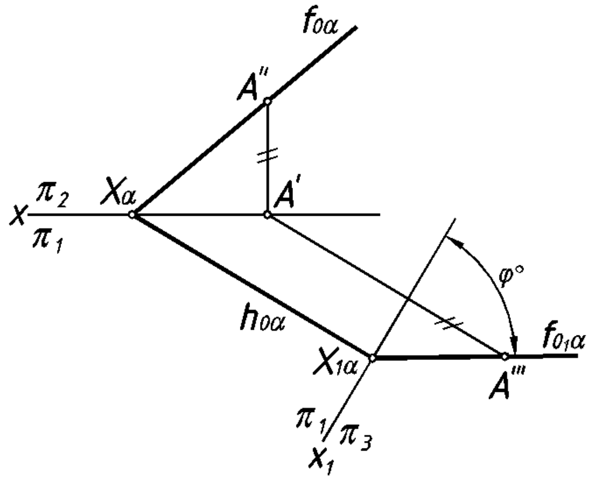


Рис. 106

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *С какой целью производится преобразование проекционного чертежа?*
- *В чем суть способа замены плоскостей проекций?*
- *Как задают новую ось проекций для преобразования чертежа прямой общего положения в чертеж прямой уровня?*
- *Как задают новую ось проекций для преобразования чертежа прямой уровня в чертеж проецирующей прямой?*
- *В какой последовательности чертеж прямой общего положения преобразуется в чертеж проецирующей прямой?*
- *Как задают новую ось проекций для преобразования чертежа плоскости общего положения в чертеж проецирующей плоскости?*
- *Как задают новую ось проекций для преобразования чертежа плоскости общего положения в чертеж проецирующей плоскости?*
- *Как задают новую ось проекций для преобразования чертежа проецирующей плоскости в чертеж плоскости уровня?*
- *В какой последовательности чертеж плоскости общего положения преобразуется в чертеж плоскости уровня?*
- *Как чертеж плоскости общего положения, заданной следами, преобразуется в чертеж проецирующей плоскости?*

§20. СПОСОБ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Плоскопараллельным перемещением геометрической фигуры называется такое перемещение, при котором все точки геометрической фигуры перемещаются в параллельных плоскостях.

При решении задач плоскости, в которых происходит перемещение точек геометрической фигуры, располагают параллельно плоскостям проекций $\boldsymbol{\pi_1}$ и $\boldsymbol{\pi_2}$.

Рассмотрим плоскопараллельное перемещение отрезка $\boldsymbol{AB}$ в положение $\boldsymbol{A_1B_1}$ относительно горизонтальной плоскости проекций (рис.107). Точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ перемещаются в новое положение $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$ в параллельных плоскостях $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Поскольку плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — фронтально проецирующие, фронтальные проекции $\boldsymbol{A''}$ и $\boldsymbol{A_1''}$ точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A_1}$ принадлежат фронтальному следу $\boldsymbol{f_{0\alpha}}$ плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, а фронтальные проекции $\boldsymbol{B''}$ и $\boldsymbol{B_1''}$ точек $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B_1}$ принадлежат фронтальному следу $\boldsymbol{f_{0\beta}}$ плоскости $\boldsymbol{\beta}$.

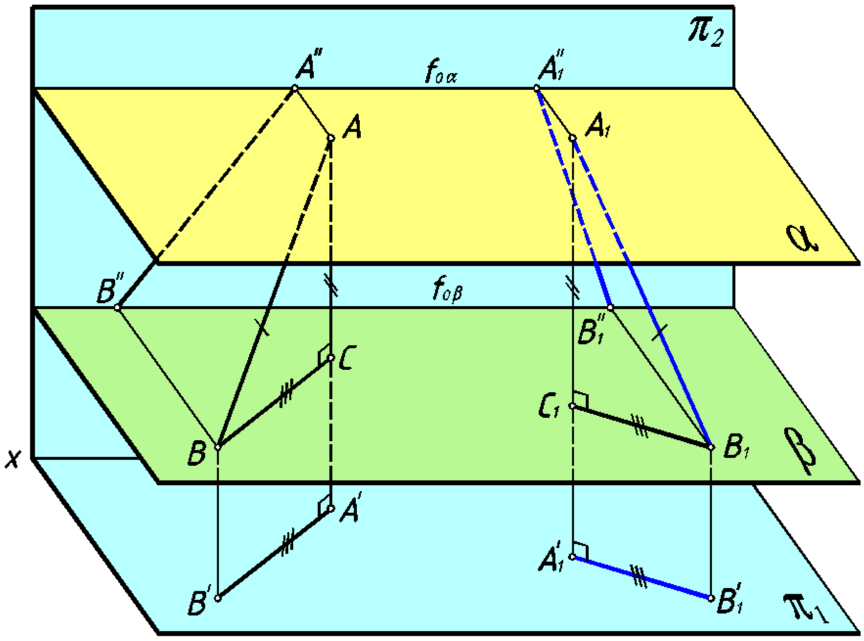


Рис.107

Горизонтальные проекции $A'B'$ и $A_1'B_1'$ отрезков конгруэнтны. Чтобы доказать это, рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и $A_1'B_1'C_1'$. Гипотенузы этих треугольников равны, т.к. отрезок AB при перемещении в положение A_1B_1 остается неизменным, а катеты AC и A_1C_1 равны, т.к. их величина есть расстояние между параллельными плоскостями α и β. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны и их катеты BC и B_1C_1 равны. В силу того, что отрезки BC и B_1C_1 лежат в плоскости β, параллельной горизонтальной плоскости проекций, их горизонтальные проекции равны, т.е. $|A'B'| = |A_1B_1|$.

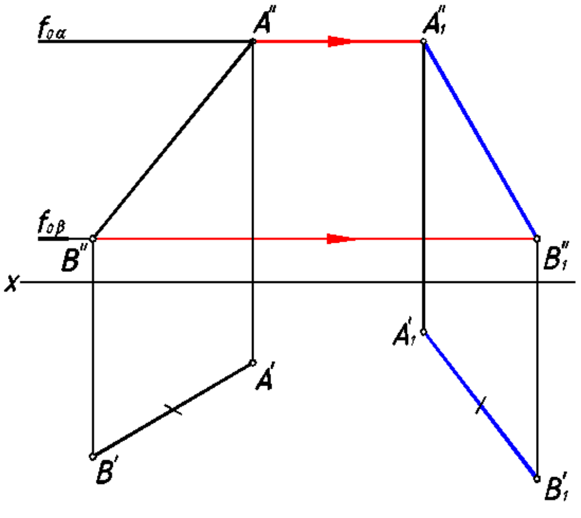
При плоскопараллельном перемещении отрезка относительно фронтальной плоскости π_2 проекций горизонтальные проекции его концов перемещаются по следам плоскостей, параллельных фронтальной плоскости проекций, а фронтальная проекция перемещается в плоскости π_2, не изменяя своей величины.

На проекционном чертеже процесс плоскопараллельного перемещения отрезка относительно горизонтальной плоскости проекций показан на рис.108.

Последовательность построений следующая:

1) Горизонтальную проекцию $A'B'$ отрезка перемещают в новое положение $A_1'B_1'$.

2) Фронтальную проекцию $A''B''$ отрезка строят, проводя горизонтальные и вертикальные линии связи через проекции точек A и B.



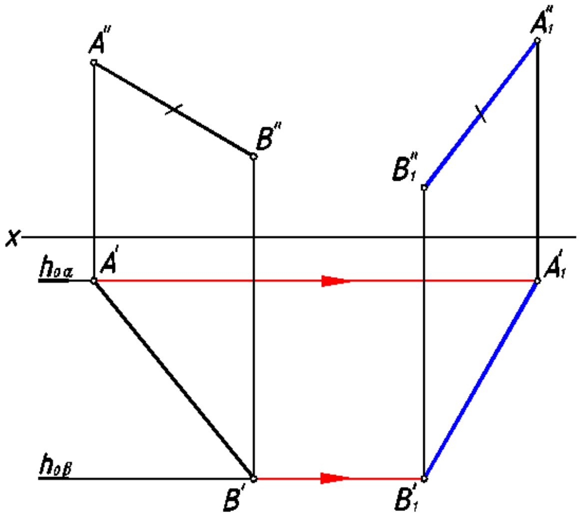


Рис.108 Рис.109

Процесс плоскопараллельного перемещения отрезка относительно фронтальной плоскости проекций на проекционном чертеже показан на рис.109.

Последовательность построений следующая:

1) Фронтальную проекцию ***A"B"*** отрезка перемещают в новое положение $\boldsymbol{A_1''B_1''}$.

2) Горизонтальную проекцию ***A'B'*** отрезка строят, проводя горизонтальные и вертикальные линии связи через проекции точек ***A*** и ***B***.

Как известно, преобразования чертежа осуществляют для того, чтобы геометрические фигуры общего положения заняли частное положения (параллельное или перпендикулярное плоскостям проекций).

Покажем, последовательное плоскопараллельное перемещение отрезка прямой ***AB*** общего положения в проецирующее положение (рис.110).

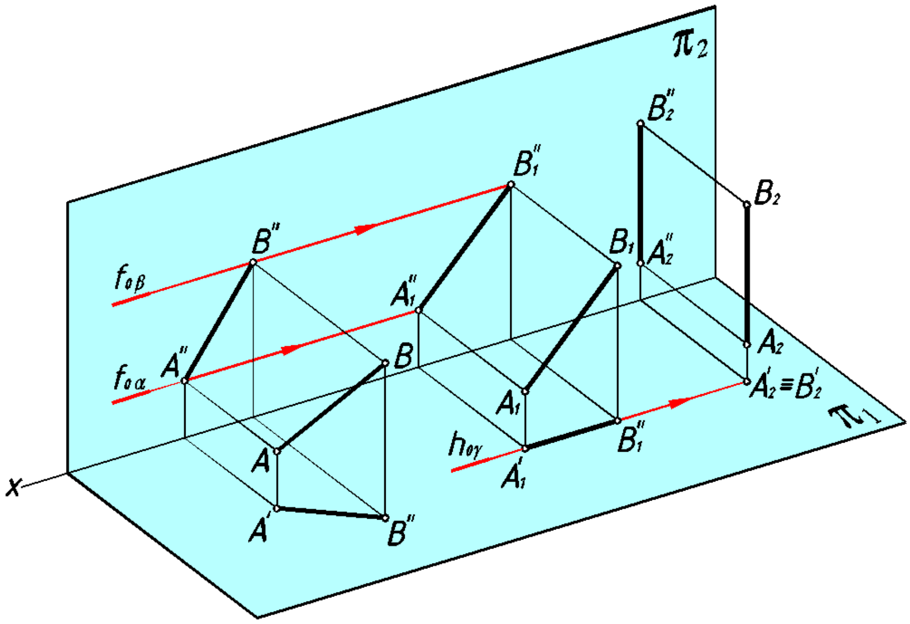


Рис.110

Одним перемещением осуществить преобразование невозможно. Поэтому, отрезок прямой ***AB*** перемещают сначала параллельно горизонтальной плоскости проекций в положение $\boldsymbol{A_1B_1}$, параллельное фронтальной плоскости проекций, а затем перемещают его параллельно фронтальной плоскости проекций в положение A_2B_2, перпендикулярное горизонтальной плоскости проекций.

Рассмотрим теперь последовательность преобразования чертежа отрезка прямой общего положения в чертеж горизонтально проецирующего отрезка (рис.111).

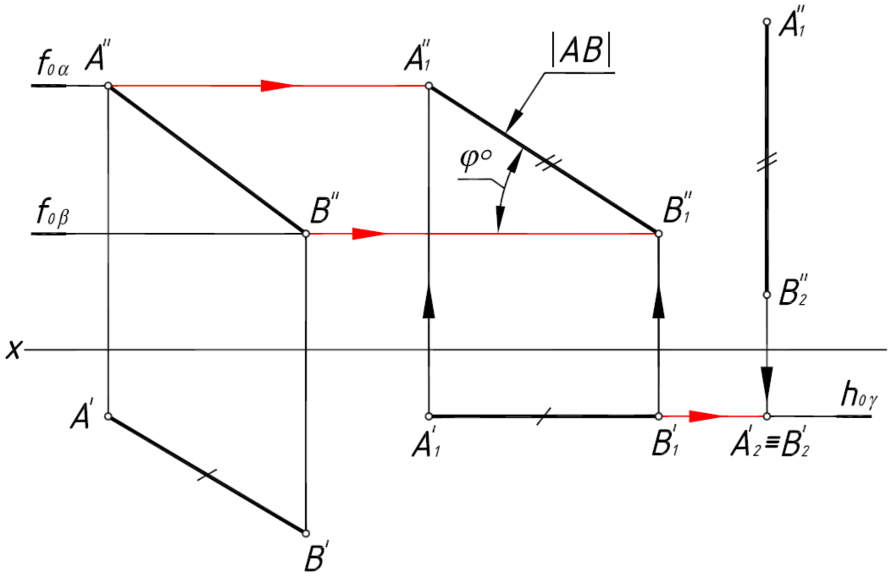


Рис.111

Сначала чертеж отрезка $\boldsymbol{AB}$ общего положения преобразуют в чертеж отрезка $\boldsymbol{A_1B_1}$, параллельного фронтальной плоскости проекций. Для этого его новую горизонтальную проекцию $\boldsymbol{A_1'B_1'}$ располагают параллельно оси $\boldsymbol{x}$. В этом случае новая фронтальная проекция отрезка $\boldsymbol{A_1''B_1''}$ будет равна действительной величине отрезка, а угол наклона ее к оси $\boldsymbol{x}$ (угол $\boldsymbol{\varphi°}$) равен углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Затем чертеж фронтального отрезка $\boldsymbol{A_1B_1}$ преобразуют в чертеж горизонтально проецирующего отрезка $\boldsymbol{A_2B_2}$. Для этого его новую фронтальную проекцию $\boldsymbol{A_2''B_2''}$ располагают перпендикулярно оси $\boldsymbol{x}$, тогда на горизонтальную плоскость проекций отрезок спроецируется в точку $\boldsymbol{A_2' \equiv B_2'}$.

Рассмотрим использование плоскопараллельного перемещения для преобразования чертежа плоскости. Для этого решим задачу по определению натуральной величины треугольника $\boldsymbol{ABC}$ (рис.112).

Известно, что плоская фигура проецируется без искажения тогда, когда ее плоскость параллельна плоскости проекций. Следовательно, процесс преобразования сводится к преобразованию плоскости общего положения, в которой находится треугольник, в плоскость уровня. Эта задача, так же, как при способе замены плоскостей проекций (см.§19, рис.105), решается в два этапа: на первом этапе плоскость общего положения преобразуется в проецирующую плоскость, на втором этапе проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

Чтобы треугольник занял проецирующее положение, проведем в его плоскости горизонталь $\boldsymbol{AD}$ и переместим его горизонтальную проекцию так, чтобы горизонталь стала фронтально проецирующей прямой $\boldsymbol{A_1D_1}$. При этом фронтальная проекция треугольника вырождается в отрезок $\boldsymbol{B_1''C_1''}$, угол наклона которого к оси проекций $\boldsymbol{x}$ (угол $\boldsymbol{\varphi°}$) равен углу наклона плоскости треугольника к горизонтальной плоскости проекций.

Для того, чтобы проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня, располагаем ее фронтальную проекцию параллельно оси **x**. На горизонтальную плоскость проекций треугольник проецируется в натуральную величину.

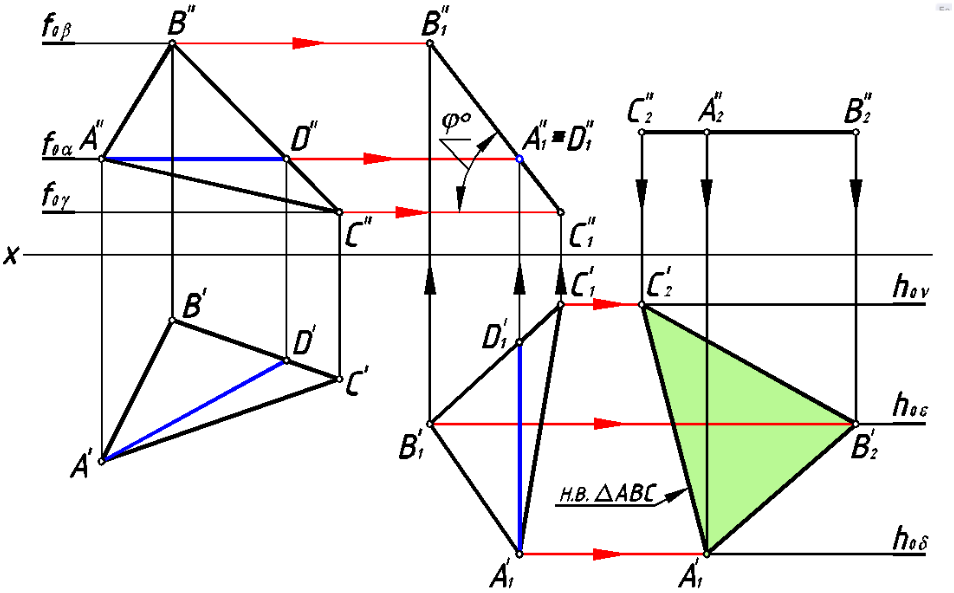


Рис.112

Из изложенного выше можно сделать следующий вывод: способ плоскопараллельного перемещения рационально использовать при решении метрических задач по определению действительных величин геометрических фигур и углов их наклона к плоскостям проекций.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какое перемещение геометрической фигуры называется плоскопараллельным?*
- *Как перемещаются фронтальные проекции точек геометрической фигуры при плоскопараллельном перемещении ее относительно горизонтальной плоскости проекций?*
- *Почему не изменяется длина горизонтальной проекции отрезка при плоскопараллельном перемещении его относительно горизонтальной плоскости проекций?*
- *Какова последовательность плоскопараллельного перемещения отрезка прямой из общего положения в проецирующее?*
- *Как плоскость общего положения преобразовать в проецирующую?*
- *Как проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня?*
- *В какой последовательности плоскость общего положения преобразуется в плоскость уровня?*
- *Для решения каких задач рационально использовать способ плоскопараллельного перемещения?*

§21. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ

21.1. Вращение вокруг проецирующей прямой

При вращении (рис.113) вокруг некоторой неподвижной оси i, называемой осью вращения, каждая точка A вращаемой фигуры перемещается в плоскости α, перпендикулярной оси вращения. Эта плоскость называется плоскостью вращения. Точка перемещается по окружности m (окружности вращения), центр O которой (центр вращения) находится на пересечении оси вращения i с плоскостью вращения α. Радиус окружности m (радиус вращения) равен расстоянию от центра вращения O до вращаемой точки A ($R=|AO|$).

Поскольку ось вращения перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то на горизонтальную плоскость проекций окружность вращения m проецируется в окружность m', а на фронтальную плоскость проекций в отрезок m'', лежащий на следе $f_{0\alpha}$ плоскости вращения.

При перемещении точки A в положение A_1 горизонтальная проекция этой точки A' перемещается по окружности m' в положение A_1', а фронтальная проекция A'', оставаясь на следе плоскости вращения $f_{0\alpha}$, в положение A_1''.

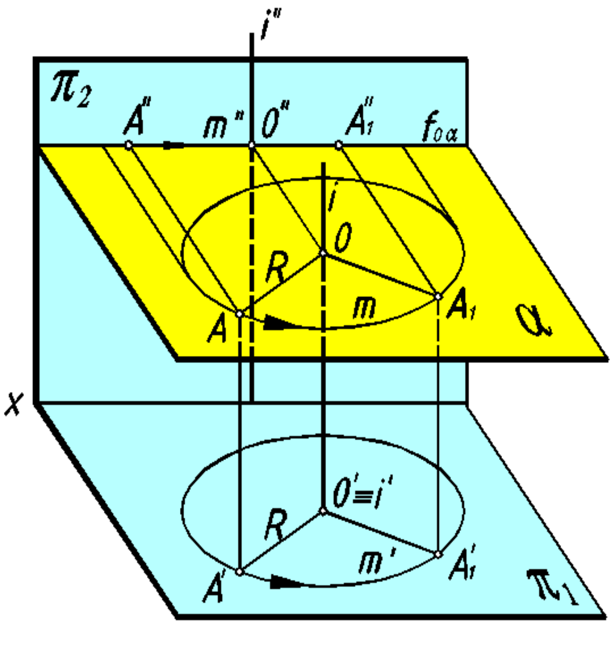


Рис. 113

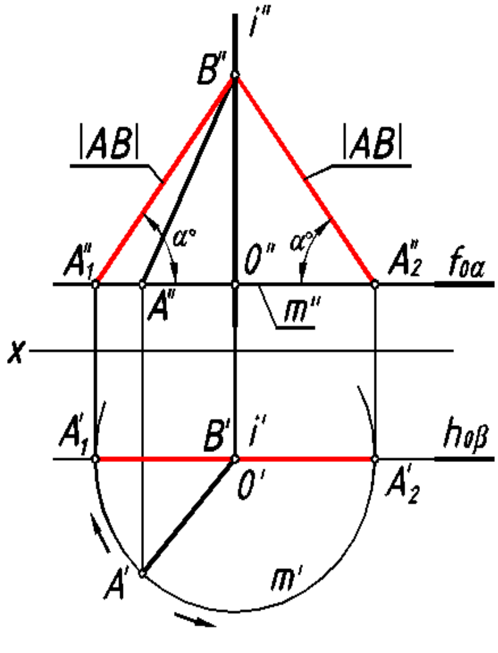


Рис. 114

На рис.114 отрезок прямой AB поворачивается вокруг оси i до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций. Поскольку точка B находится на оси вращения, она своего положения при вращении не изменяет. Точка A переходит либо в положение A_1 (рис.107), либо в положение A_2, т.е. отрезок совмещается с плоскостью β (плоскостью совмещения), которая проходит через ось вращения и параллельна фронтальной плоскости проекций. После поворота фронтальная проекция отрезка равна его натуральная величина, а угол $\alpha°$ равен углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

21.2. Вращение вокруг прямой уровня

Суть способа вращения вокруг прямой, параллельной плоскости проекций, заключается в том, что плоскую фигуру поворачивают вокруг её горизонтали или фронтали до тех пор, пока она не станет параллельной горизонтальной плоскости проекций (при вращении вокруг горизонтали) или фронтальной плоскости проекций (при вращении вокруг фронтали).

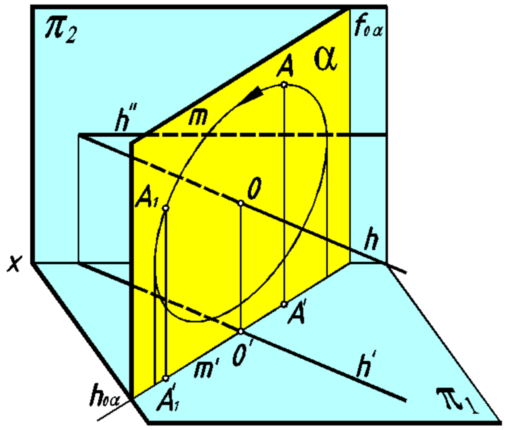


Рис. 115

На рис.115: $\boldsymbol{h}$ — ось вращения; $\boldsymbol{\alpha}$ — плоскость вращения; $\boldsymbol{O}$ — центр вращения; $|AO|$ — радиус вращения.

Т.к. плоскость вращения $\boldsymbol{\alpha}$ перпендикулярна горизонтали $\boldsymbol{h}$, она является горизонтально проецирующей. Ее горизонтальный след $\boldsymbol{h_{0\alpha}}$ перпендикулярен $\boldsymbol{h'}$.

При вращении точки вокруг горизонтали ее горизонтальная проекция перемещается по горизонтальному следу $\boldsymbol{h_{0\alpha}}$ плоскости вращения.

Рассмотрим вращение отрезка $\boldsymbol{AB}$ вокруг горизонтальной прямой $\boldsymbol{h}$ (рис.116). Смысл вращения в том, чтобы совместить отрезок с плоскостью $\boldsymbol{\beta}$, проходящей через горизонталь параллельно горизонтальной плоскости проекций. Плоскость $\boldsymbol{\beta}$ называется ***плоскостью совмещения.***

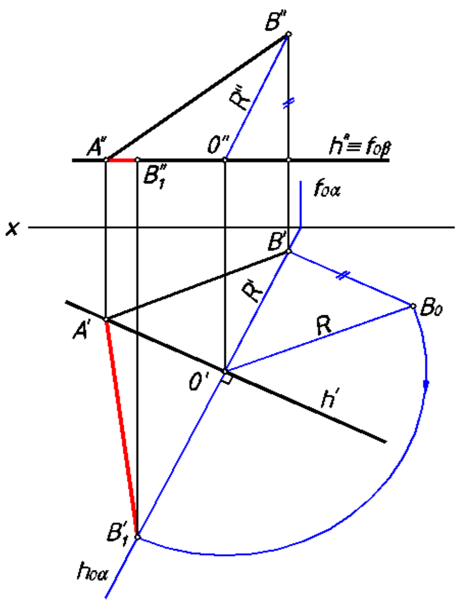


Рис. 116

При решении задачи необходимо последовательно находить все элементы способа вращения: плоскость вращения $\boldsymbol{\alpha}$, центр вращения $\boldsymbol{O}$, радиус вращения $\boldsymbol{R}$.

Поскольку конец отрезка $\boldsymbol{A}$ находится на оси вращения, его положение при вращении не изменяется. Проследим за перемещением точки $\boldsymbol{B}$ по ходу решения:

1) Строим следы плоскости вращения $\boldsymbol{\alpha}$. Горизонтальный след плоскости $h_{o\alpha}$ проходит через горизонтальную проекцию $\boldsymbol{B'}$ точки $\boldsymbol{B}$ перпендикулярно горизонтальной проекции $\boldsymbol{h'}$ горизонтали.

2) Находим проекции центра вращения $\boldsymbol{O}$. Горизонтальная проекция $\boldsymbol{O'}$ центра находится на пересечении горизонтального следа плоскости вращения $h_{o\alpha}$ и горизонтальной проекции оси вращения $\boldsymbol{h'}$.

3) Построением прямоугольного треугольника определяем величину радиуса вращения $|\boldsymbol{R}|$.

4) Т.к. при совмещении точки $\boldsymbol{B}$ с плоскостью $\boldsymbol{\beta}$ радиус вращения проецируется в натуральную величину, откладываем эту величину $|\boldsymbol{R}|$ на следе плоскости вращения от точки $\boldsymbol{O'}$, и отмечаем новую проекцию $\boldsymbol{B_1'}$ точки $\boldsymbol{B}$.

5) Соединяем точки $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{B_1'}$ и получаем горизонтальную проекцию отрезка $\boldsymbol{AB}$ в совмещенном с плоскостью $\boldsymbol{\beta}$ положении. Т.к. отрезок теперь параллелен горизонтальной плоскости проекций, он проецируется в натуральную величину.

Если надо использовать способ вращения плоскости, заданной следами при совмещении её с плоскостью проекций, то вращение производят вокруг одного из ее следов.

При вращении вокруг горизонтального следа плоскость совмещается с горизонтальной плоскостью проекций (рис.117). Точка $\boldsymbol{A}$, принадлежащая фронтальному следу, вращается вокруг горизонтального следа в плоскости $\boldsymbol{\beta}$. Поскольку в исходном и в совмещенном положении фронтальный след проецируется в натуральную величину, совмещенное положение точки $\boldsymbol{A}$ можно найти, проведя дугу радиусом $|\boldsymbol{X_\alpha A''}|$ до пересечения в точке $\boldsymbol{A_1'}$ со следом плоскости вращения.

Такую задачу решают для определения истинной величины угла $\boldsymbol{\delta°}$ между следами плоскости.

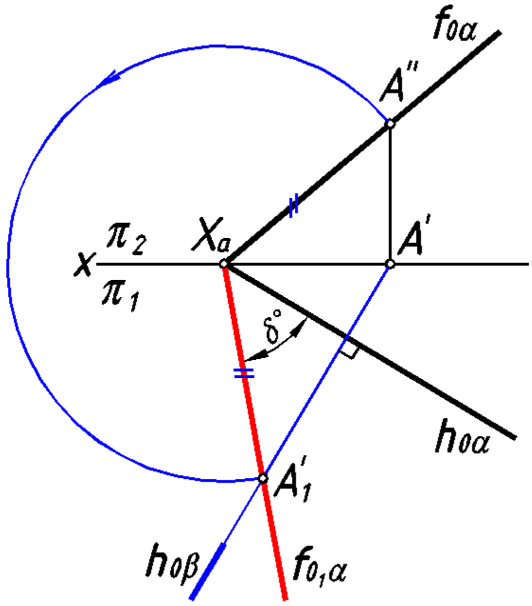


Рис. 117

Используя способ вращения плоской фигуры вокруг прямой, параллельной плоскости проекций (линии уровня), можно одним преобразованием поставить эту плоскую фигуру в положение, параллельное плоскости проекций. Таким способом определена натуральная величина треугольника АВС, заданного на рис.118.

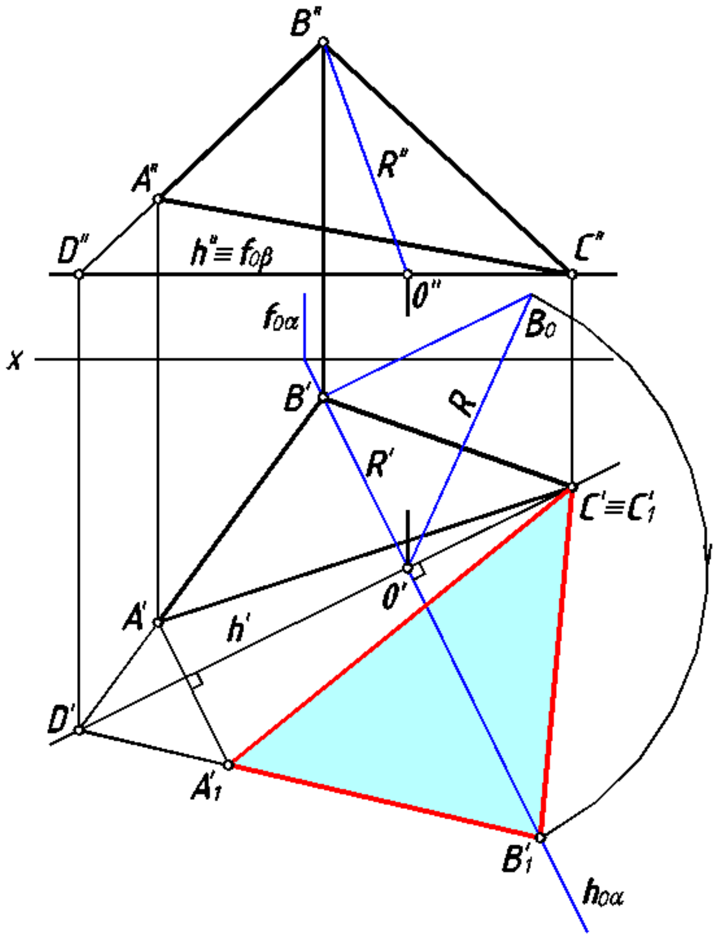


Рис. 118

Следует помнить, что способ вращения применим только в случае, если все геометрические элементы принадлежат одной плоской фигуре.

Вопросы для самопроверки

- *В чем суть способа вращения вокруг проецирующей прямой?*
- *Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения способом вращения его вокруг проецирующей прямой?*
- *В чем суть способа вращения вокруг прямой уровня?*
- *Что такое плоскость вращения, центр вращения, радиус вращения, плоскость совмещения?*

Глава V

КРИВЫЕ ЛИНИИ

§22. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИВЫХ ЛИНИЙ

В начертательной геометрии линии занимают особое положение. С помощью линий создаются наглядные модели многих процессов, происходящих в природе, творческой деятельности инженеров, конструкторов, архитекторов, дизайнеров и других специалистов. В любой области человеческой деятельности мы встречаемся с кривыми линиями в виде моделей физических процессов или геометрических образов: траектории движения небесных тел и летательных аппаратов, точек движения машин и механизмов, обводы фюзеляжей самолётов и корпусов судов и т.п.

Линию можно рассматривать как траекторию перемещения в пространстве некоторой точки. Линию также можно рассматривать как результат взаимного пересечения поверхностей или границу поверхности.

Способы образования линий могут быть различными, и они могут быть заданы графически и аналитически, т.е. уравнением.

Кривая как множество точек пространства, координаты которых являются функциями одной переменной p, задается системой уравнений:

$$x = f_1(p),$$
$$y = f_2(p),$$
$$z = f_3(p).$$

Уравнение линии позволяет определить координаты любой точки, принадлежащей этой линии. Линии разделяют на ***алгебраические*** (определяемые в декартовых координатах алгебраическими уравнениями) и ***трансцендентные*** (определяемые трансцендентными уравнениями). Если алгебраическое уравнение, описывающее линию, n-й степени, то алгебраическая линия называется ***линией*** n***-го порядка***.

Для построения ортогональных проекций кривой линии необходимо построить проекции ряда точек, принадлежащих этой кривой, и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на оригинале.

Линии, у которых все точки лежат в одной плоскости, называются ***плоскими***. В противном случае они называются ***пространственными***.

Графически порядок плоской алгебраической линии характеризуется наибольшим числом точек пересечения ее с прямой линией (рис.119). Порядок пространственной алгебраической линии характеризуется числом точек пересечения ее с плоскостью (рис.120). При этом надо иметь в виду, что в число точек пересечения входят как действительные, так и мнимые точки.

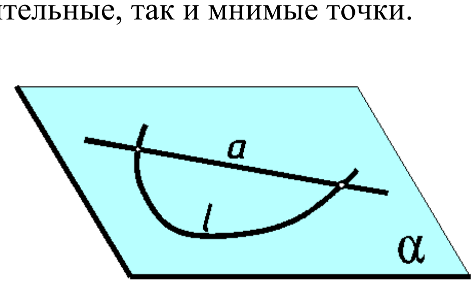


Рис. 119

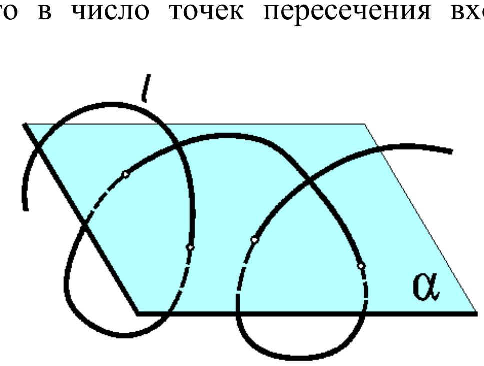


Рис. 120

Чтобы определить, является данная линия плоской или пространственной, следует выяснить лежат ли ее точки в одной плоскости. Для этого соединим попарно четыре точки ***A***, ***B***, ***C*** и ***D***, принадлежащие этой линии (рис.121). Если построенные отрезки ***AC*** и ***BD*** пересекаются, то они лежат в одной плоскости, и кривая линия плоская.

Как видим, заданная на рис.121 кривая — пространственная, т.к. построенные отрезки не пересекаются (точки пересечения их проекций не лежат на одной линии связи).

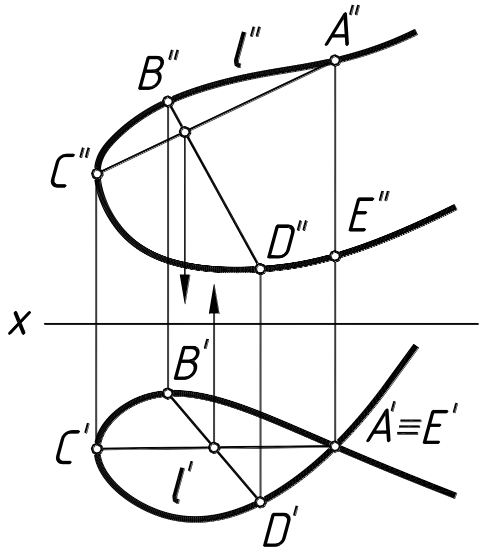


Рис. 121

При построении ортогональных проекций кривых необходимо знать те свойства этих кривых, которые сохраняются при проецировании. К таким свойствам относятся следующие:

1. Порядок проекции алгебраической кривой равен порядку самой кривой.

2. Несобственным точкам кривой соответствуют несобственные точки ее проекции.

3. Касательные к кривой проецируются в касательные к её проекциям (понятие касательной см. в следующем параграфе).

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какие линии относятся к закономерным и незакономерным, алгебраическим и трансцендентным?*
- *Что называется порядком алгебраической кривой линии?*
- *Какие линии называются плоскими, а какие - пространственными?*
- *Как графически определяется порядок плоской и пространственной алгебраической кривой?*
- *Перечислите свойства проецирования кривых линий.*

§23. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К КРИВОЙ ЛИНИИ

Через точку ***A*** на кривой ***l*** проведем секущие ***AB*** и ***AC*** (рис.122). Если перемещать точки ***B*** и ***C*** по кривой, приближая их к точке ***A***, то секущие будут поворачиваться вокруг точки ***A***. Предельные положение секущих t_B и t_C называется ***полукасательными*** к кривой ***l*** в точке ***A***. Если полукасательные образуют одну прямую, то эта прямая называется ***касательной*** к кривой ***l*** в точке ***A***.

Прямая n_A, перпендикулярная касательной ***t*** в точке ***A***, называется ***нормалью*** к плоской кривой в точке ***A***.

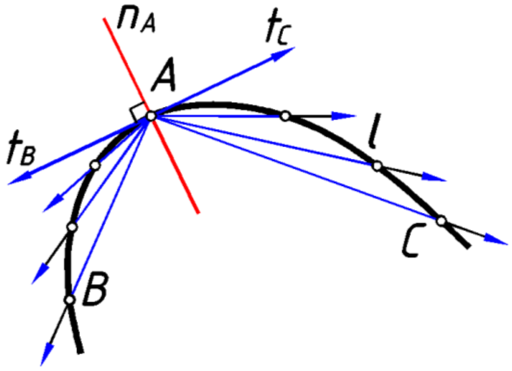


Рис. 122

Касательная и нормаль в точке плоской кривой лежат в плоскости этой кривой.

К пространственной кривой через точку, принадлежащую этой прямой, можно провести единственную касательную и множество нормалей. Эти нормали лежат в плоскости, перпендикулярной к касательной в данной точке кривой.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Что называется касательной и нормалью к кривой линии?*
- *В какой плоскости располагаются касательная и нормаль в точке на плоской кривой?*
- *Что является множеством нормалей в точке пространственной кривой?*

§24. КРИВЫЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В практической деятельности инженеру наиболее часто приходится встречаться с кривыми линиями второго порядка. Поэтому уделим этим линиям особое внимание.

К кривым линиям второго порядка относятся кривые, которые в декартовой системе координат описываются алгебраическим уравнением второй степени. К этим кривым относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Ниже в главе VI «Поверхности» будет показано, что все эти линии являются плоскими сечениями прямого конуса вращения, поэтому их ещё называют ***кониками.***

24.1. Окружность

Окружность – замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра), лежащей в той же плоскости, что и кривая (рис.123).

В декартовой системе координат с началом в центре окружности ее уравнение записывается как

$$x^2 + y^2 = R^2$$

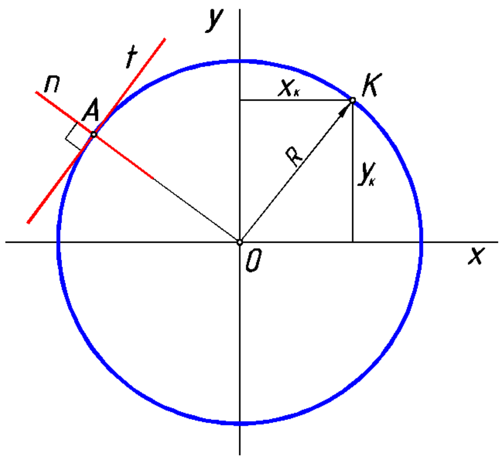


Рис. 123

Отрезок прямой, соединяющий точку на окружности с центром ***O*** называется радиусом ***R*** окружности. Отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр, называется диаметром окружности. Окружность симметрична относительно любого из ее диаметров.

Касательная ***t*** к окружности в точке ***A*** перпендикулярна ее радиусу ***OA*** в этой точке, а нормаль ***n*** совпадает с этим радиусом.

24.2. Эллипс

Эллипсом называется плоская замкнутая кривая, для каждой из точек которой сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная (рис.124).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Отрезок ***AB***, равный ***2a***, называется большой осью эллипса, а отрезок ***CD***, равный ***2b***, — малой осью эллипса. Большая и малая оси эллипса взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке О. называемой центром эллипса. Эллипс симметричен относительно своих осей.

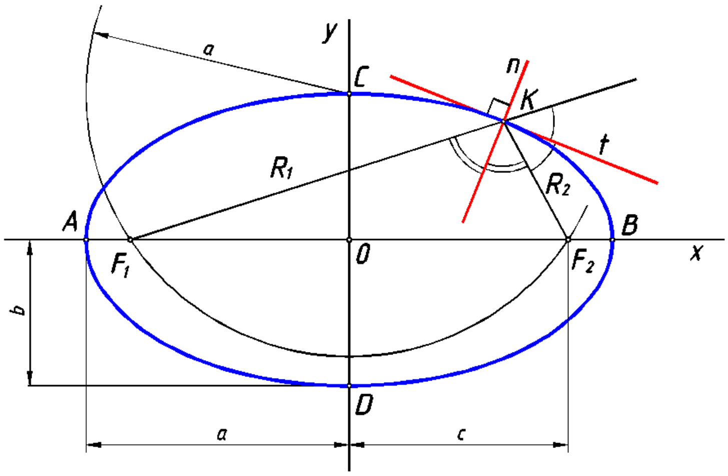


Рис. 124

Концы большой и малой осей эллипса (точки ***A, B, C*** и ***D***) называются вершинами эллипса.

Длина отрезка, заключенного между фокусами F_1 и F_2 эллипса, называется ***фокусным расстоянием*** и обозначается ***2c***. Расстояние от вершин малой оси эллипса до его фокусов равно длине его большой полуоси ***a***. Если фокусное расстояние равно нулю, то эллипс превращается в окружность.

Отрезки R_1 и R_2, соединяющие точку эллипса с его фокусами называются ***радиус-векторами***. Согласно определению эллипса, $R_1 + R_2 = 2a = const$.

Нормаль ***n*** в точке ***К***, является биссектрисой внутреннего угла между радиус-векторами, а касательная ***t***, перпендикулярная нормали, является биссектрисой внешнего угла между радиус-векторами.

Большая и малая оси эллипса полностью задают эллипс. Действительно, проведя из вершины ***C*** дугу окружности радиусом ***a***, в пересечении ее с большой осью найдем фокусы F_1 и F_2 эллипса. Далее, проводя дуги окружностей радиусом R_1 и R_2 из центров F_1 и F_2, находим все точки на эллипсе.

На рис.125 показан способ построения точек эллипса, основанный на представлении эллипса, как равномерно сжатой окружности.

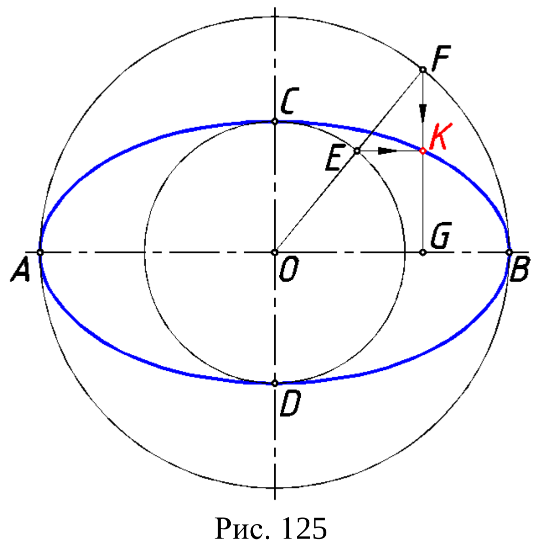


Рис. 125

На осях эллипса, как на диаметрах, строим две окружности. Через центр эллипса проводим произвольный луч. Через точки ***E*** и ***F*** пересечения луча с окружностями проводим прямые параллельно большой и малой оси эллипса. Точка ***K*** пересечения этих прямых принадлежат эллипсу.

24.3. Гипербола

Гиперболой называется плоская незамкнутая кривая, для каждой из точек которой разность расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 той же плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (рис. 126):

$$F_1K - F_2K = 2a = const$$

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = c^2 - a^2$$

Расстояние $2c$ между фокусами гиперболы называется ***фокусным расстоянием***.

Точки A и B называются вершинами гиперболы. Расстояние между ними равно $2a$. Отрезок AB называется главной осью гиперболы, а его середина O — центром гиперболы. Отрезок прямой, проходящий через центр O перпендикулярно большой оси и имеющий длину $2b$, называется малой осью гиперболы. Если $a = b$, то гипербола называется равнобочной.

Две прямые, проходящие через центр гиперболы и пересекающие ветви гиперболы в несобственных точках, называются асимптотами гиперболы. У равнобочной гиперболы асимптоты взаимно перпендикулярны.

Гипербола имеет две оси симметрии. Ось x, проходящая через фокусы, называется действительной осью гиперболы. Ось y, перпендикулярная действительной оси, называется мнимой осью гиперболы.

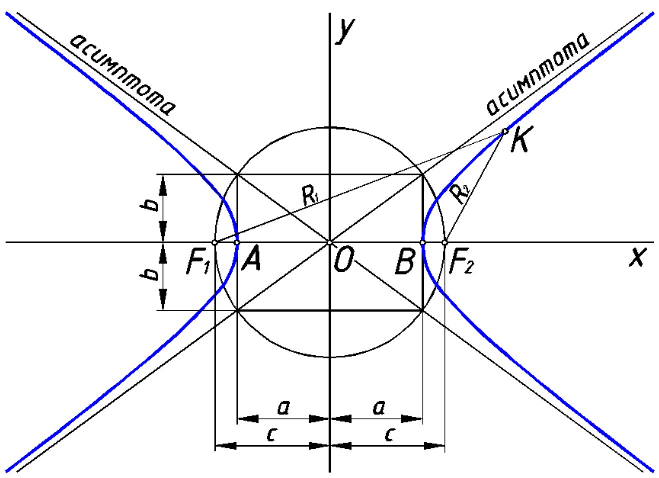


Рис. 126

Касательная t к гиперболе в некоторой ее точке K является биссектрисой внутреннего угла между радиус-векторами R_1 и R_2 (рис.127). Нормаль n в той же точке является биссектрисой внешнего угла между радиус-векторами.

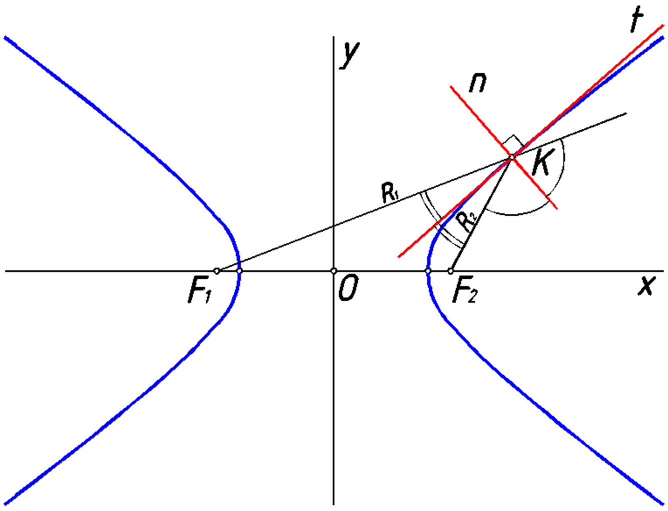


Рис. 127

24.4. Парабола

Параболой (рис.128) называется незамкнутая кривая, каждая точка K которой равноудалена от фиксированной точки (***фокуса*** параболы F) и прямой, называемой ***директрисой***:

$$FK = CK$$

Прямая, проходящая через фокус перпендикулярно директрисе, называется ***осью*** параболы и является ее осью симметрии.

Вершина A параболы равноудалена от фокуса и директрисы.

Если выбрать систему координат так, как показано на рис.128, то уравнение параболы примет вид

$$y^2=2px,$$

где p — расстояние от фокуса до директрисы, называемое ***параметром*** параболы.

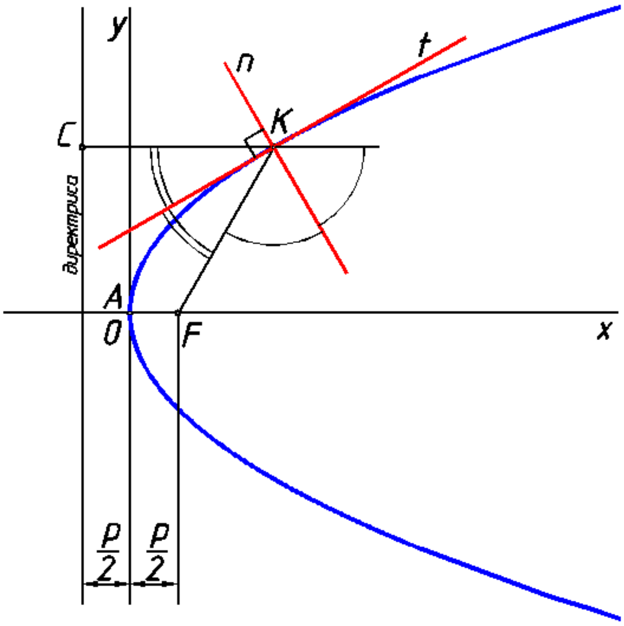


Рис. 128

Касательная к параболе в некоторой ее точке ***K*** является биссектрисой внутреннего угла между радиус-вектором ***FK*** и перпендикуляром ***KC*** к директрисе. Нормаль ***n*** является биссектрисой внешнего угла этих же прямых.

24.5. Проекции окружности, лежащей в плоскости общего положения

В практической деятельности при выполнении различных чертежей приходится сталкиваться с изображением окружности, плоскость которой не параллельна плоскости проекций.

Если окружность лежит в плоскости общего положения, то она проецируется на обе плоскости проекций в виде эллипсов (рис.129).

Большой осью каждого эллипса является проекция диаметра окружности, параллельного плоскости проекций. Проекция ей перпендикулярного диаметра является малой осью эллипса, в который проецируется окружность на данную плоскость проекций. Построение горизонтальной и фронтальной проекций окружности следует проводить раздельно, хотя между ними и существует проекционная связь.

При построении горизонтальной проекции окружности большая ось эллипса, в который проецируется окружность, расположена на горизонтали плоскости, а малая ось на линии наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций. При построении фронтальной проекции окружности большая ось эллипса расположена на фронтали плоскости, а малая на линии наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций.

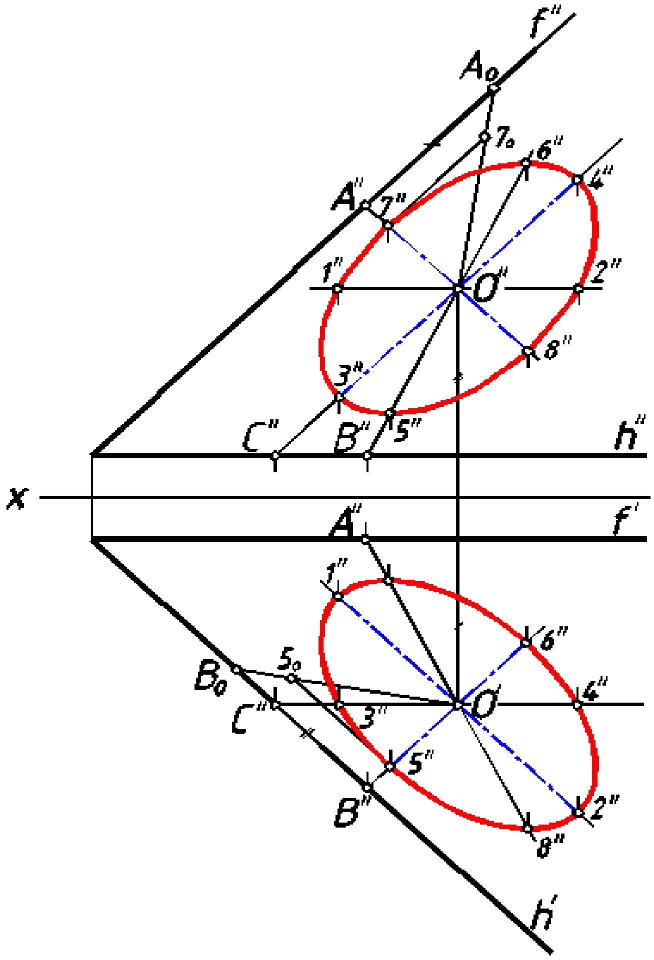


Рис.129

Диаметр окружности, параллельный плоскости проекций, проецируется на эту плоскость проекций без искажения. Проекцию перпендикулярного ей диаметра строим, откладывая на прямой отрезок заданной длины. При этом нам известно, что проекция данного диаметра окружности перпендикулярна уже построенной проекции диаметра, параллельного данной плоскости проекций (на основании теоремы о частном случае проецирования прямого угла).

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Перечислите кривые линии второго порядка.*
- *Какая кривая называется окружностью. эллипсом, гиперболой, параболой?*
- *Как построить касательную и нормаль к окружности, эллипсу, гиперболе и параболе?*
- *Как построить эллипс по его большой и малой осям?*
- *Что называется асимптотами гиперболы?*
- *Какие линии являются проекциями окружности, лежащей в плоскости общего положения?*
- *Какие диаметры окружности проецируются в большую и малую оси эллипсов, которые являются проекциями этой окружности?*

§25. ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ

Среди пространственных кривых в технике широкое применение находят винтовые линии (цилиндрические и конические), представляющие собой траекторию движения точки, равномерно перемещающейся по образующей прямого кругового цилиндра или конуса, которая в свою очередь равномерно вращается вокруг оси цилиндра или конуса.

На рис.130 представлена цилиндрическая винтовая линия, называемая ***гелисой***, где ***i*** — ось винтовой линии. Проекции винтовой линии строят, фиксируя промежуточные положения движущейся точки.

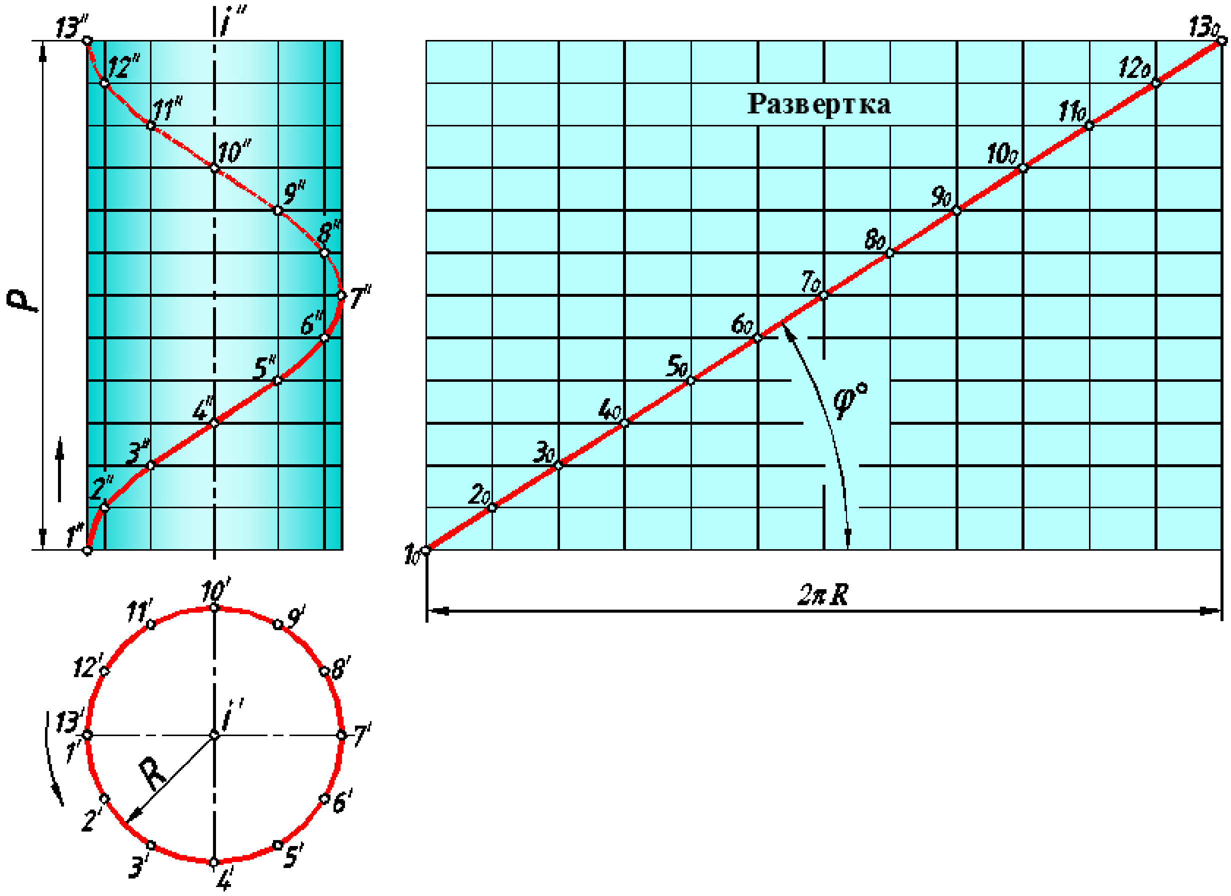


Рис. 130

На горизонтальную плоскость проекций цилиндрическая винтовая линия проецируется в окружность, а на фронтальную — в синусоиду. Параметрами винтовой линии являются радиус ***R*** и шаг ***P***, представляющий собой расстояние, на которое перемещается точка вдоль оси ***i*** за один оборот вокруг этой оси.

В зависимости от направления вращения образующей цилиндрическая винтовая линия может быть ***правой*** или ***левой***. Если горизонтальная проекция точки перемещается против часовой стрелки, то винтовая линия называется правой, в противном случае – левой.

Если цилиндрическую винтовую линию вместе с цилиндрической поверхностью, которой она принадлежит, развернуть на плоскости, то винтовая линия будет представлять собой прямую линию (развёртка винтовой линии). Угол $\varphi°$ называется ***углом подъёма*** винтовой линии (рис.130).

На поверхности прямого кругового цилиндра винтовая линия определяет кратчайшее расстояние между двумя точками, принадлежащими этой поверхности. Такие линии называются ***геодезическими***.

Вопросы для самопроверки

- *Что называется цилиндрической винтовой линией ?*
- *Как проецируется цилиндрическая винтовая линия на плоскость, параллельную ее оси, и на плоскость, перпендикулярную ее оси?*
- *Что представляет собой развертка цилиндрической винтовой линии?*
- *Какие линии называются геодезическими?*

Глава VI

ПОВЕРХНОСТИ

§26. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Поверхности составляют обширное многообразие геометрических форм от сравнительно простой плоскости до сложнейших фигур криволинейных поверхностей трехмерного пространства. По разнообразию форм и свойств, по своему значению при формировании различных геометрических фигур, по той роли, которую они играют в науке, технике, архитектуре, изобразительном искусстве, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических фигур. Любое физическое тело ограничивается своей поверхностью. Инженерная деятельность неразрывно связана с конструированием, расчетом, изготовлением и изображением различных поверхностей, их объединением и вычитанием одной из другой.

В математике под ***поверхностью подразумевается непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением в форме многочлена n-й степени или в форме какой-либо трансцендентной функции*** [2]. Поверхность — это двухпараметрическое множество точек или однопараметрическое множество линий [8].

В начертательной геометрии принят кинематический способ образования поверхностей, при котором поверхность рассматривается как непрерывная совокупность последовательных положений некоторой движущейся в пространстве линии (рис. 131).

Линию, производящую поверхность, называют ***образующей*** и обозначают g.

Закон перемещения образующей в пространстве и изменения её формы задаются обычно ***направляющими*** линиями. Для получения наглядного изображения поверхности можно представить её образование как скольжение образующей g одновременно по трём направляющим линиям.

Линии, по которым скользит образующая при своём движении, называют ***направляющими*** и обозначают d.

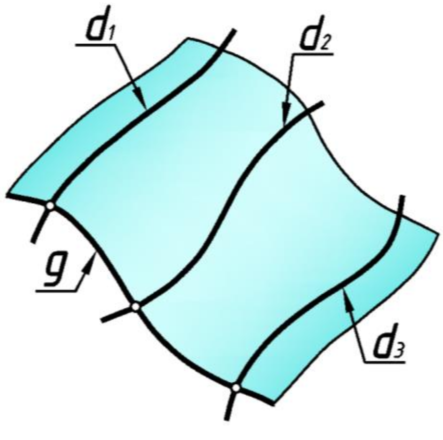


Рис. 131

Образующая может быть прямой, кривой, постоянного или переменного вида. Понятия образующей и направляющей часто условны. Для задания одной и той же поверхности образующая и направляющая могут меняться местами. Например, поверхность прямого кругового цилиндра может быть образована перемещением образующей прямой линии по направляющей окружности. Та же поверхность образуется перемещением окружности по направляющей прямой. Обычно выбирают тот или иной способ задания поверхности в зависимости от условий решаемой задачи.

Если поверхность может быть задана перемещением прямой линии, она называется ***линейчатой***, в противном случае — ***нелинейчатой***.

Линейчатые поверхности подразделяются на ***развёртываемые*** и ***неразвертываемые.*** Развертываемые поверхности могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и складок, например, цилиндрическая и коническая поверхности. Неразвертываемые поверхности с плоскостью совместить нельзя.

Вопросы для самопроверки

- *Какой способ задания поверхностей принят в начертательной геометрии?*
- *Что такое образующая и направляющая поверхности?*
- *Какие поверхности называются линейчатыми?*
- *Какие поверхности называются развертываемыми?*

§27. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

При кинематическом способе образования поверхности вводится понятие определителя поверхности.

Определителем поверхности называется необходимая и достаточная совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

Определитель поверхности состоит из двух частей: *геометрической* и *алгоритмической* частей.

Геометрическая часть определителя содержит перечень геометрических фигур, участвующих в задании поверхности, и отношений между ними.

Алгоритмическая часть определителя описывает закон движения и изменения образующей.

Чтобы отделить геометрическую часть определителя от алгоритмической, первую заключают в круглые скобки, а вторую — в квадратные.

Тогда определитель произвольной поверхности будет иметь следующую форму:

$$\boldsymbol{\Phi\ (\Gamma);[A],}$$

где $(\boldsymbol{\Gamma})$ — геометрическая часть; $[\boldsymbol{A}]$ — алгоритмическая часть.

На основе определителя поверхности можно составить классификацию поверхностей.

По виду движения образующей поверхности можно разделить на:

1. **Поверхности параллельного переноса**, когда образующая $\boldsymbol{g}$ перемещается поступательно вдоль направляющей $\boldsymbol{d}$

$$\Phi\ (g;\ d)\ ;\ [g_j = T_d\ (g)]$$

2. **Поверхности вращения**, когда образующая **g** вращается вокруг некоторой оси $\boldsymbol{i}$.

$$\Phi\ (g;\ i)\ ;\ [g_j = R_i\ (g)]$$

3. **Винтовые поверхности**, когда образующая $\boldsymbol{g}$ совершает равномерное поступательное и вращательное движения около оси $\boldsymbol{i}$

$$\Phi\ (g;\ i)\ ;\ [g_j = R_i(g) \circ Ti(g)]$$

На чертеже поверхность задают проекциями геометрических фигур, входящих в состав геометрической части определителя.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Что называется определителем поверхности, из каких частей он состоит?*
- *Каково содержание геометрической и алгоритмической частей определителя поверхности?*
- *Как разделяют поверхности по виду перемещения образующей?*

§28. НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрение поверхностей начнём с некоторых нелинейчатых поверхностей, которые могут встретиться в инженерной практике.

Циклические поверхности образуются окружностью переменного радиуса, центр которой перемещается по какой-либо кривой (рис. 132а).

Если плоскость образующей окружности в процессе перемещения остаётся перпендикулярной к направляющей кривой, то поверхность называется ***каналовой***. Если радиус образующей окружности в процессе перемещения остаётся постоянным, то поверхность называется ***трубчатой*** (рис. 132б).

В качестве примера трубчатой поверхности можно привести поверхность цилиндрической винтовой пружины.

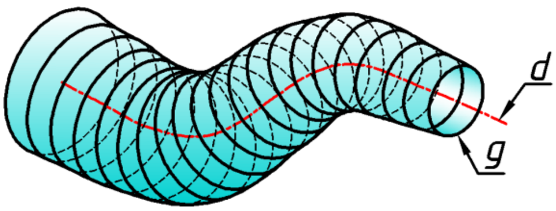


Рис. 132а

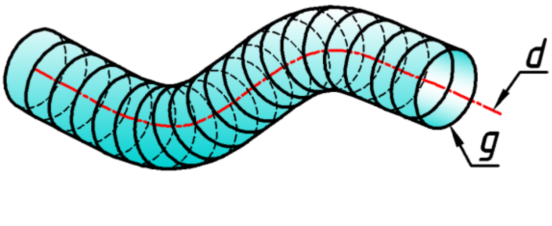


Рис. 132б

Поверхности, задаваемые каркасом. Эти поверхности задаются семейством линий, образующихся при пересечении поверхностей плоскостями. Поверхности, задаваемые каркасом, нельзя считать вполне определёнными, так как неизвестно, что из себя представляет поверхность между линиями, задающими каркас. Такие поверхности ещё называют графическими. Они могут быть заданы только графически (рис. 132в).

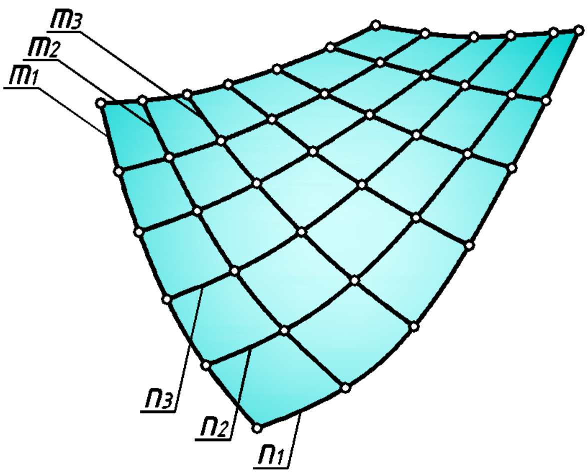


Рис. 132в

Из нелинейчатых поверхностей интерес представляют поверхности второго порядка, у которых образующими и направляющими являются кривые второго порядка.

Одна из таких поверхностей — трёхосный эллипсоид, у которого образующей и направляющими являются эллипсы, представлена на рис.133

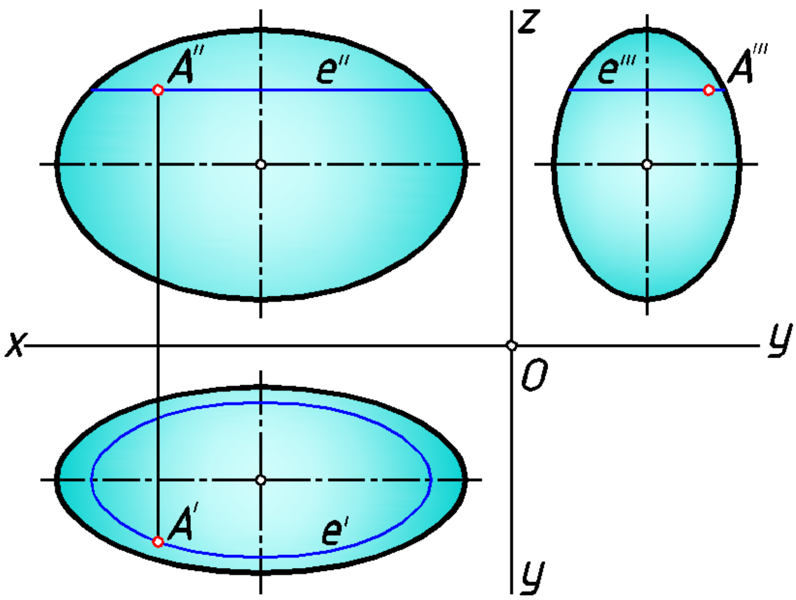


Рис. 133

Для нахождения проекций точки ***A***, принадлежащей эллипсоиду, следует на его поверхности задать какую-либо линию (например, эллипс ***e***) и на проекциях этой линии указать проекции точки.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как образуются циклическая и трубчатая поверхности?*
- *Как образуется поверхность трехосного эллипсоида?*

§29 ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность, образованная движением прямой линии по заданному закону, называется ***линейчатой.***

Всё многообразие линейчатых поверхностей может быть отнесено к трём случаям:

29.1. Линейчатые поверхности с тремя направляющими

Эти поверхности образуются при перемещении прямолинейной образующей по трём направляющим. Направляющими могут быть как прямые, так и кривые линии.

$$\Phi(\bar{g};d_1,d_2,d_3);\left[g_j\cap\{d_1,d_2,d_3\}\neq\varnothing\right]$$

В качестве примера приведём изображение дважды косого цилиндроида — линейчатой поверхности с тремя направляющими — одной прямой и двумя кривыми линиями (рис. 134):

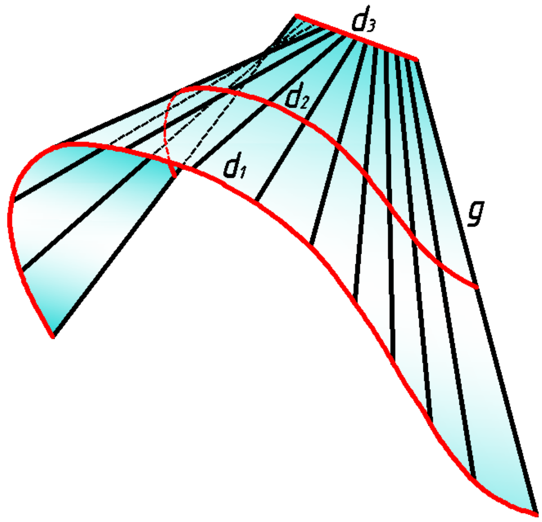


Рис. 134

29.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и направляющей плоскостью

Эти поверхности образуются при перемещении прямолинейной образующей по двум направляющим.

Вместо третьей направляющей задают плоскость, относительно которой образующие в каждом своём положении расположены под одним и тем же углом. Такая плоскость называется ***направляющей плоскостью***.

$$\Phi(\bar{g};d_1,d_2,\alpha);\left[g_j\cap\{d_1,d_2\}\neq\varnothing\wedge(g_j\hat{}\alpha)=const\right]$$

Если образующие в каждом своем положении параллельны направляющей плоскости, то эту плоскость называют ***плоскостью параллелизма***.

Рассмотрим некоторые поверхности с плоскостью параллелизма, которые ещё называют ***поверхностями Каталана***.

Цилиндроид образуется перемещением прямолинейной образующей по двум криволинейным направляющим, причем в каждый момент образующая параллельна заданной плоскости α.

$$\Phi(\bar{g};\tilde{d}_1,\tilde{d}_2,\alpha);\left[g_j \cap \{d_1,d_2\} \neq \varnothing \wedge g_j \parallel \alpha\right]$$

На рис.135 плоскость параллелизма α задана горизонтально проецирующей, поэтому горизонтальные проекции образующих параллельны горизонтальному следу $h_{0\alpha}$ этой плоскости.

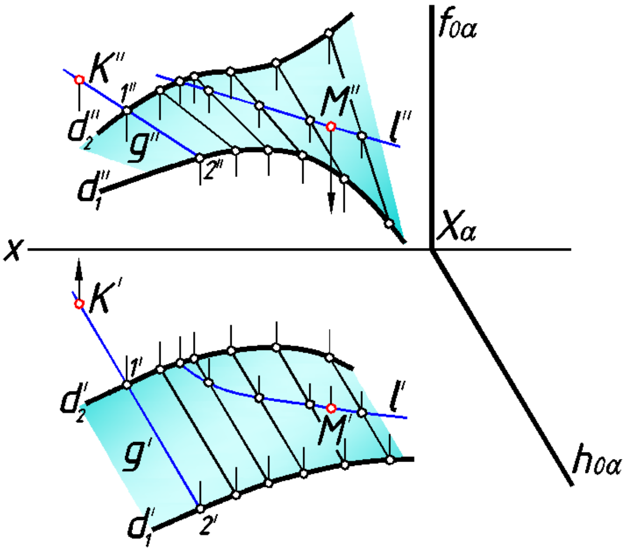


Рис.135

Если задана горизонтальная проекция K' точки, принадлежащей поверхности, то для нахождения её фронтальной проекции через точку K' следует провести горизонтальную проекцию g' образующей, найти ее фронтальную проекцию g'' и на ней найти фронтальную проекцию K'' точки K.

Если задана фронтальная проекция M'' точки M, принадлежащей поверхности, то горизонтальную проекцию этой точки можно найти с помощью кривой l, проходящей через точку M, предварительно проведя на поверхности ряд образующих.

Коноид (рис.136) образуется перемещением прямолинейной образующей по прямолинейной и криволинейной направляющим, не лежащим в одной плоскости.

$$\Phi(\bar{g};\bar{d}_1,\tilde{d}_2,\alpha);\left[g_j \cap \{d_1,d_2\} \neq \varnothing \wedge g_j \parallel \alpha\right]$$

Нахождение недостающих проекций точек, принадлежащих коноиду, аналогично тому, как это продемонстрировано на цилиндроиде.

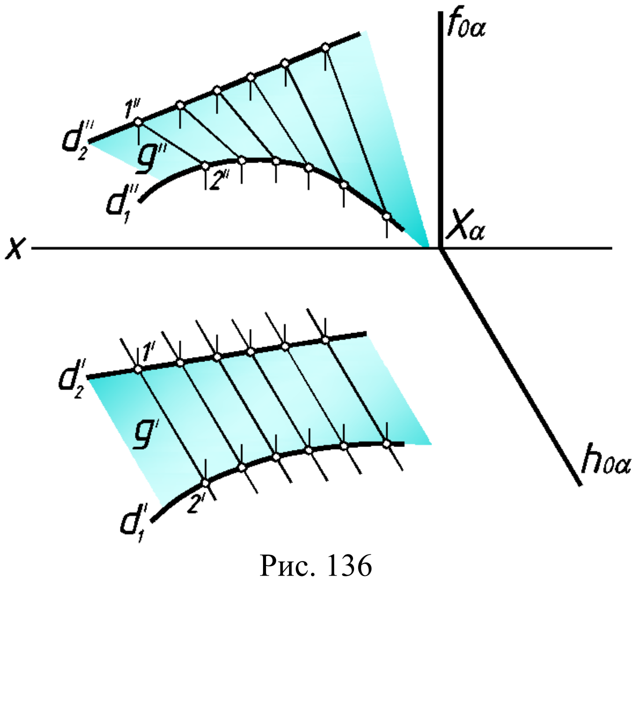


Рис. 136

Гиперболический параболоид или косая плоскость образуется перемещением прямолинейной образующей по двум, не лежащим в одной плоскости, прямолинейным направляющим.

$$\Phi(\bar{g};\bar{d}_1,\bar{d}_2,\alpha);\left[g_j \cap \{d_1,d_2\} \neq \varnothing \wedge g_j \square \alpha\right]$$

На рис.137 и рис.138 задана косая плоскость.

На рис.137 прямые d_1, и d_2 являются направляющими, а прямые g_1 и g_2 — образующими, параллельными плоскости параллелизма α. На рис.138 задана та же поверхность, но направляющие и образующие поменялись местами. Новая плоскость параллелизма β является плоскостью общего положения, которая параллельна новым образующим. Она задана пересекающимися прямыми a и b, где $a \parallel g_1$ и $b \parallel g_2$.

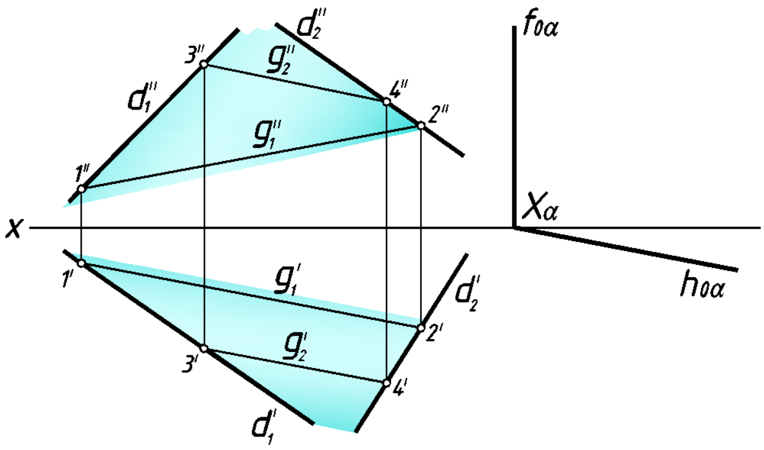


Рис. 137

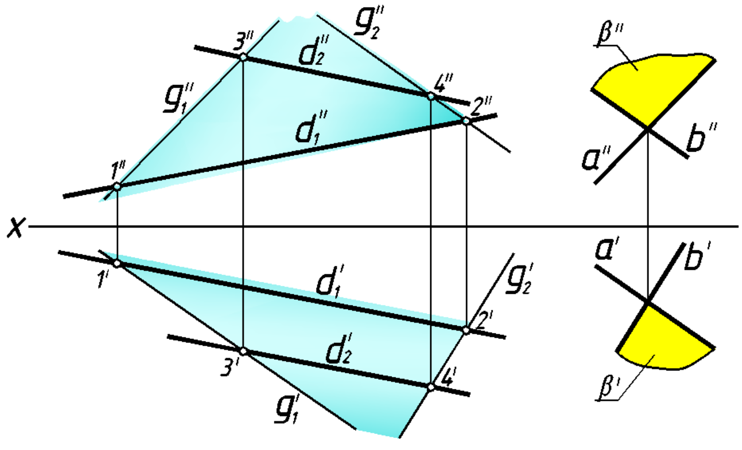


Рис. 138

На основании выше изложенного, можно сделать вывод о том, что на поверхности косой плоскости имеется две системы образующих, которые обладают следующими свойствами:

1) две образующие одной системы являются скрещивающимися прямыми;

2) две образующие разных систем всегда пересекаются;

3) через каждую точку поверхности проходит по одной образующей каждой системы;

4) все образующие одной системы параллельны некоторой плоскости.

29.3.Линейчатые поверхности с одной направляющей (торсовые поверхности)

Поверхность с ребром возврата (торс) образуется перемещением прямолинейной образующей, в каждом своём положении касающейся некоторой пространственной кривой (рис.139). Эта пространственная кривая является для поверхности направляющей. Она называется *ребром возврата*.

$$\Phi(\bar{g};\tilde{d});\left[g_j \frown d\right]$$

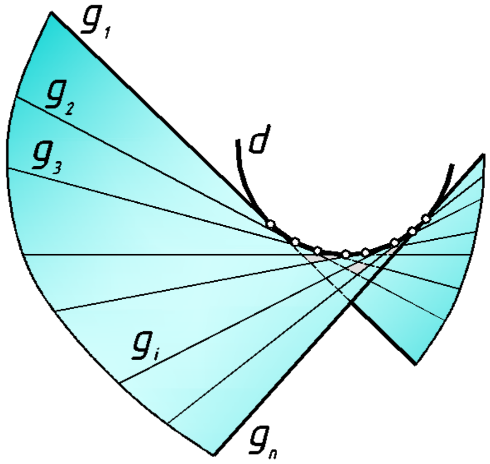


Рис. 139

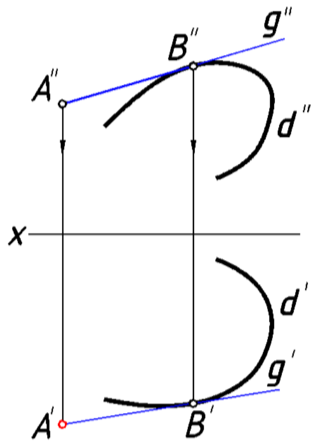


Рис. 140

Ребро возврата делит поверхность на две полости, которые разделяются ребром возврата.

На чертеже поверхность задают только проекциями ребра возврата (рис.140).

Если задана одна проекция A'' точки A, принадлежащей поверхности, то, для нахождения второй проекции A' точки, следует через точку A'' провести касательную g'' к проекции d'' кривой. Далее, найдя горизонтальную проекцию B' точки касания, построить горизонтальную проекцию g' касательной, и на ней найти проекцию A' точки A.

Если ребро возврата вырождается в точку, то получается частный вид торса — *коническая поверхность* (если точка собственная) или *цилиндрическая поверхность* — если ребро возврата вырождается в несобственную точку.

Коническая поверхность (рис.141а) образуется перемещением прямолинейной образующей g по криволинейной направляющей d. При этом образующие в каждом своем положении проходят через некоторую точку S, называемую вершиной конической поверхности.

$$\Phi(\bar{g};\tilde{d},S)[g_j \cap d \wedge S \in g_j]$$

На рис.141б проекциями направляющей g и вершины S задана коническая поверхность.

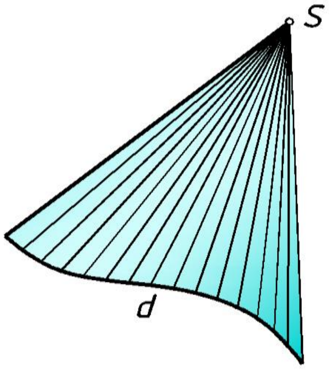


Рис.141а

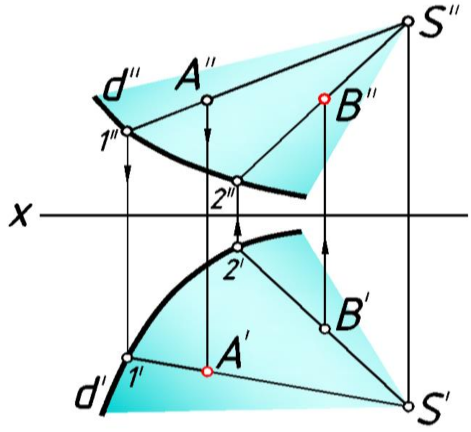


Рис.141б

Недостающие проекции точек, принадлежащих поверхности, находят с помощью образующих, проходящих через эти точки (рис.141б).

Цилиндрическая поверхность (рис.142а) образуется перемещением прямолинейной образующей $\boldsymbol{g}$ по криволинейной направляющей $\boldsymbol{d}$. Образующие в каждом своем положении остаются параллельными некоторому заданному направлению (проходят через несобственную точку). Цилиндрическую поверхность можно получить из конической, если вершину конической поверхности удалить в бесконечность.

$$\boldsymbol{\Phi(\bar{g};\tilde{d},S_{\infty})[g_j \cap d \neq \varnothing \wedge S \in g_j]}$$

На рис.142б проекциями направляющей $\boldsymbol{d}$ и одной из образующих $\boldsymbol{g}$ задана цилиндрическая поверхность. Недостающие проекции точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, принадлежащих поверхности, находятся с помощью образующих, проходящих через эти точки.

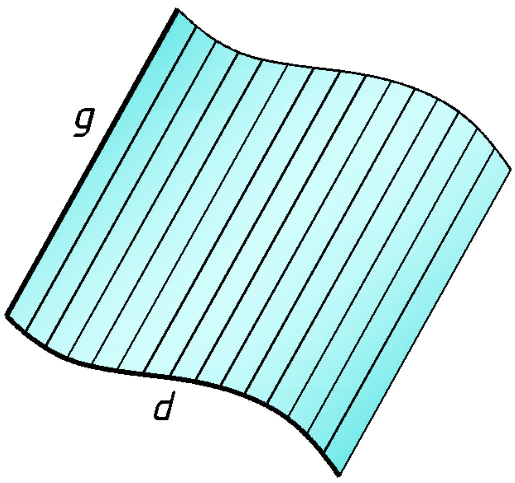


Рис.142а

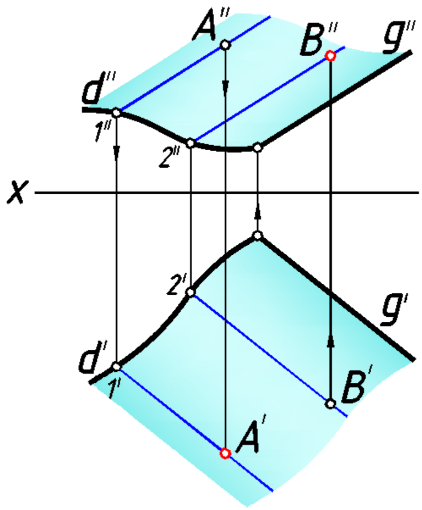


Рис.142б

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как образуется поверхность цилиндроида, коноида, гиперболического параболоида?*
- *Как образуется поверхность с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхности?*

§30. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхностью вращения называют поверхность, которая образуется при вращении образующей $\boldsymbol{g}$ вокруг неподвижной прямой $\boldsymbol{i}$, называемой осью поверхности (рис.143).

Образующей поверхности может быть как кривая линия (плоская или пространственная), так и прямая.

Поверхность вращения задают осью и образующей. На рис.143 представлена поверхность вращения, образованная вращением пространственной кривой $\boldsymbol{g}$ (образующей) вокруг оси $\boldsymbol{i}$.

Каждая точка (*A*, *B*, C…) образующей $\boldsymbol{g}$ перемещается в пространстве по окружности (***a***, ***b***, ***c***…) с центром на оси $\boldsymbol{i}$ поверхности. Окружности вращения лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и называются *параллелями поверхности*.

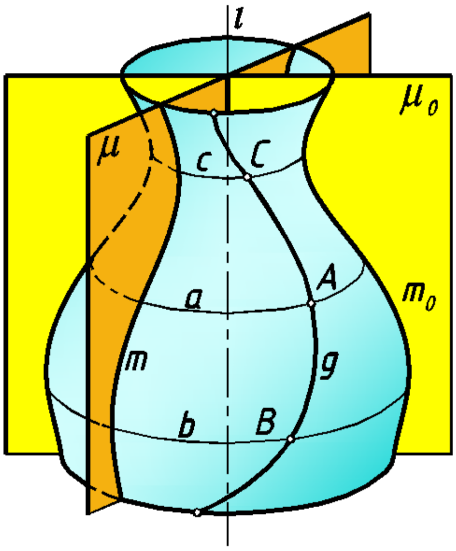


Рис. 143

Наибольшая из параллелей $\boldsymbol{b}$ называется *экватором*, а наименьшая $\boldsymbol{c}$ — *горлом* или *шейкой* поверхности.

Недостающую проекцию точки, принадлежащей поверхности вращения, всегда можно найти, проводя на поверхности через точку параллель (окружность).

Плоскость $\boldsymbol{\mu}$, проходящая через ось поверхности вращения, называется *меридиональной*. Она пересекает поверхность по линии $\boldsymbol{m}$, называемой *меридианом*.

Меридиан $\boldsymbol{m_o}$, лежащий в плоскости $\boldsymbol{\mu_o}$, параллельной какой-либо плоскости проекций, называется *главным меридианом*. Он образует очерк поверхности вращения.

Любой меридиан поверхности может быть принят за образующую, как и любая линия на поверхности вращения.

30.1. Поверхности вращения с прямолинейной образующей

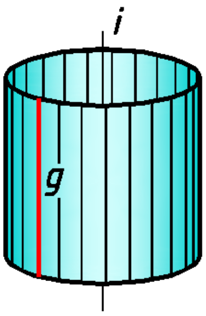


Рис. 144

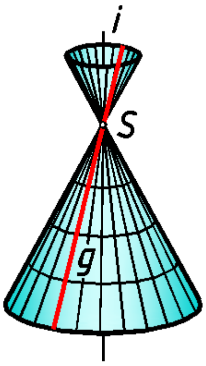


Рис. 145

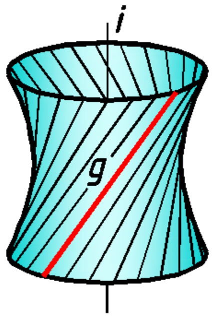


Рис. 146

В зависимости от положения прямой g относительно оси i образуются различные поверхности:

— ***цилиндрическая поверхность вращения*** образуется, если прямая g параллельна оси вращения i (рис.144);

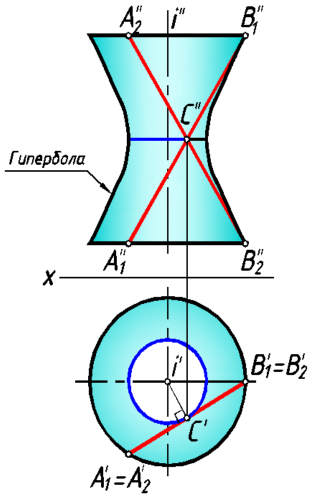
— ***коническая поверхность вращения*** образуется, если прямая g пересекает ось вращения i (рис.145). Точка S, в которой прямая пересекает ось, называется вершиной конической поверхности. Коническая поверхность имеет две полости, расположенные по разные стороны от вершины. Эту поверхность также называют прямым круговым конусом

— ***однополостный гиперболоид вращения*** образуется, если прямая g скрещивается с осью вращения i (рис.146). Очерком этой поверхности является гипербола.

Однополостный гиперболоид вращения является дважды линейчатой поверхностью. Через каждую точку C гиперболоида вращения можно провести две прямые, симметричные относительно меридиональной плоскости проходящей через заданную точку (рис.147). Каждая из прямых является образующей поверхности.

Таким образом, гиперболоид вращения имеет два семейства прямолинейных образующих (рис.148). Образующие одного семейства — скрещивающиеся прямые, образующие разных семейств — пересекающиеся прямые.

Это свойство гиперболоида вращения прекрасно использовал выдающийся русский инженер В.Г. Шухов (1853-1939), создавая свои замечательные конструкции стальных сетчатых башен (всего их было построено свыше 200). Их отличает простота конструкции, малая металлоемкость и прочность. Одно из его знаменитых творений — радиомачта высотой около150 метров и диаметром основания 40 метров (построена в 1922 г.) находится в Москве на Шаболовке (рис.149). Башня состоит из шести гиперболоидных отсеков высотой 25 метров. Западные специалисты оценили совершенство этой башни и признали ее достойной внесения в список Всемирного наследия.



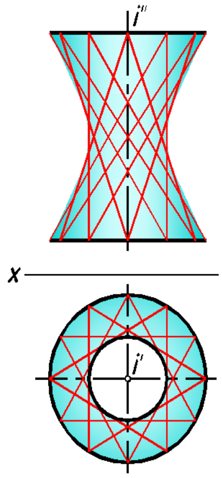
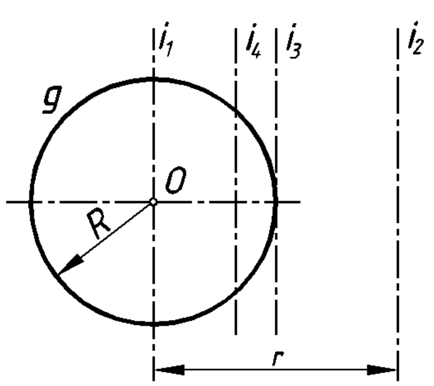


Рис. 147 Рис. 148 Рис. 149

30.2. Поверхности вращения с образующей кривой второго порядка

Если кривая второго порядка вращается вокруг своей оси, то образуется поверхность второго порядка. При вращении кривой второго порядка вокруг прямой, лежащей в плоскости этой кривой, но не совпадающей с осью кривой, образуется поверхность четвертого порядка. Максимальное число точек пересечения такой поверхности с прямой линией равно четырем.

30.2.1. Поверхности, образующиеся при вращении окружности



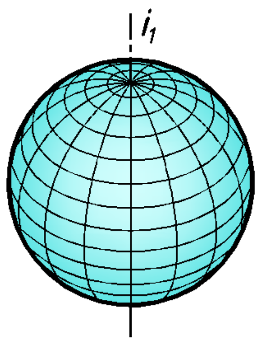


Рис. 150 Рис. 151

Если ось поверхности вращения $\boldsymbol{i_1}$ проходит через центр $\boldsymbol{O}$ окружности (рис.150), образуется ***сферическая поверхность*** (рис.151).

В случае, когда окружность вращается вокруг оси, не проходящей через ее центр, образующиеся поверхности называются *торовыми*.

Различают следующие виды торовых поверхностей:

— ***открытый тор или кольцевая поверхность*** образуется при вращении окружности вокруг оси $\boldsymbol{i_2}$, не имеющей с окружностью общих точек, когда $\boldsymbol{r > R}$ (рис.152);

— ***закрытый тор*** образуется при вращении окружности вокруг оси $\boldsymbol{i_3}$, касательной к окружности, когда $\boldsymbol{r = R}$ (рис.153);

— ***самопересекающийся тор*** образуется при вращении окружности вокруг оси $\boldsymbol{i_4}$ пересекающей окружность, когда $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{R}$ (рис.154). Эта поверхность имеет две полости: наружную и внутреннюю.

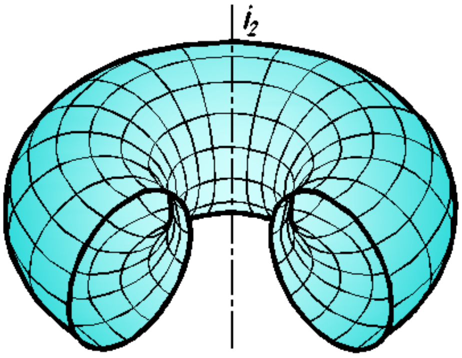


Рис. 152

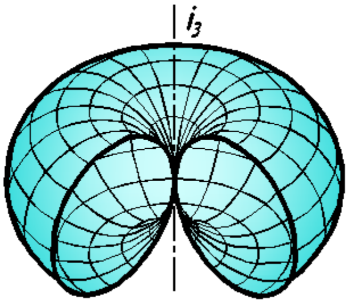


Рис. 153

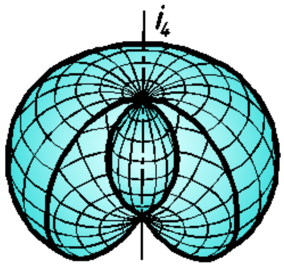


Рис. 154

30.2.2. Поверхности, образующиеся при вращении эллипса

При вращении эллипса (рис.155) вокруг его большой оси $\boldsymbol{i_1}$ образуется ***вытянутый эллипсоид вращения*** (рис.156), а при вращении вокруг его малой оси $\boldsymbol{i_2}$ — ***сжатый эллипсоид вращения*** (рис.157).

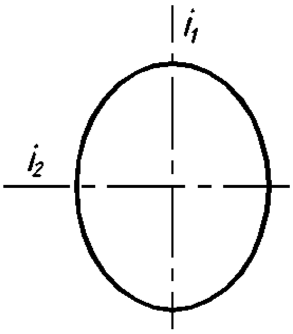


Рис. 155

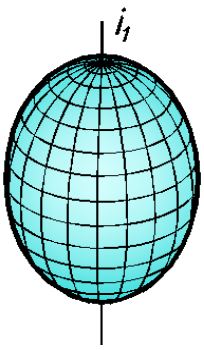


Рис. 156

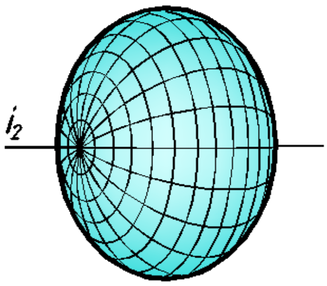


Рис. 157

30.2.3. Поверхность, образующаяся при вращении параболы

При вращении параболы (рис.158) вокруг её оси $\boldsymbol{i}$ образуется поверхность называемая ***параболоидом вращения*** (рис.159).

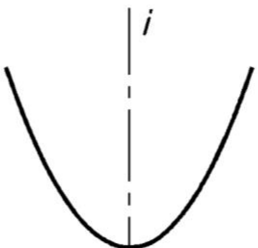


Рис. 158

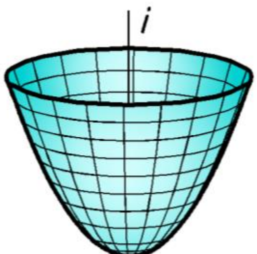


Рис. 159

В технике часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основаны конструкции параболических антенн, телескопов-рефлекторов, прожекторов, автомобильных фар.

30.2.4. Поверхности, образующиеся при вращении гиперболы

При вращении гиперболы (рис.160) вокруг её действительной оси i_1 образуется ***двуполостный гиперболоид вращения*** (рис.161), а при вращении вокруг мнимой оси i_2 — ***однополостный гиперболоид вращения*** (рис.162).

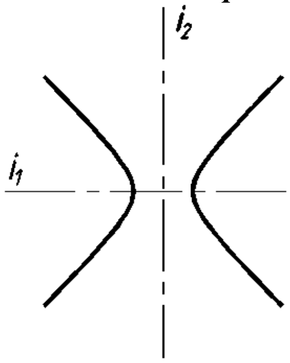


Рис. 160

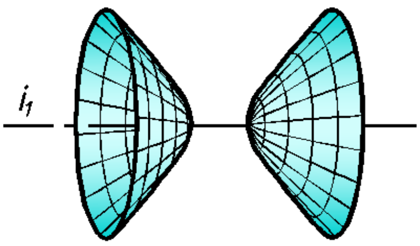


Рис. 161

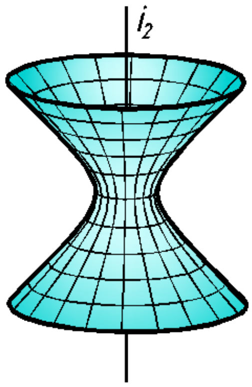


Рис. 162

Следует напомнить, что поверхность однополостного гиперболоида — линейчатая поверхность, через каждую точку которой на поверхности можно провести две прямые. Этот вопрос рассматривался выше на стр.88.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какая поверхность называется поверхностью вращения?*
- *Какая плоскость называется меридиональной?*
- *Что называется параллелью и меридианом поверхности вращения?*
- *Что называется главным меридианом поверхности вращения?*
- *Что называется экватором и горлом поверхности вращения?*
- *Какие поверхности образуются при вращении прямой линии?*
- *Сколько прямолинейных образующих можно провести на поверхности однополостного гиперболоида вращения через каждую его точку?*
- *Какая поверхность образуется при вращении окружности вокруг одного из ее диаметров?*
- *Какие поверхности образуются при вращении окружности вокруг прямой не проходящей через центр окружности?*
- *Какие поверхности образуются при вращении эллипса вокруг его осей?*
- *Как называется поверхность, образующаяся при вращении параболы вокруг ее оси?*
- *Какие поверхности образуются при вращении гиперболы вокруг ее действительной и мнимой осей?*

§31. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В технике нашли широкое применение винтовые поверхности. Например, поверхности деталей резьбовых соединений, винтовых зубчатых колес, деталей червячных и винтовых передач, воздушных и гребных винтов и многих других механизмов.

Винтовая поверхность образуется винтовым движением образующей.

Под винтовым движением понимается совокупность двух перемещений: поступательного вдоль некоторой оси, и вращательного вокруг той же оси. При этом, каждая точка образующей линии описывает цилиндрическую винтовую линию.

Наибольшее распространение получили линейчатые винтовые поверхности, у которых образующая — прямая линия. Такие поверхности называются ***геликоидами***.

Если прямая образующая перпендикулярна оси винтовой поверхности, то это — *прямая винтовая поверхность (прямой геликоид)*. Если образующая не перпендикулярна оси винтовой поверхности, то это — *косая винтовая поверхность (косой геликоид)*.

Если образующая пересекает ось винтовой поверхности, то это — *закрытая винтовая поверхность (закрытый геликоид)*, если скрещивается с осью, то это — *открытая винтовая поверхность (открытый геликоид)*.

На рис.163 представлена прямая закрытая винтовая поверхность, образованная перемещением отрезка прямой ***g***. Отрезок равномерно вращается вокруг оси ***i*** и равномерно перемещается вдоль этой оси.

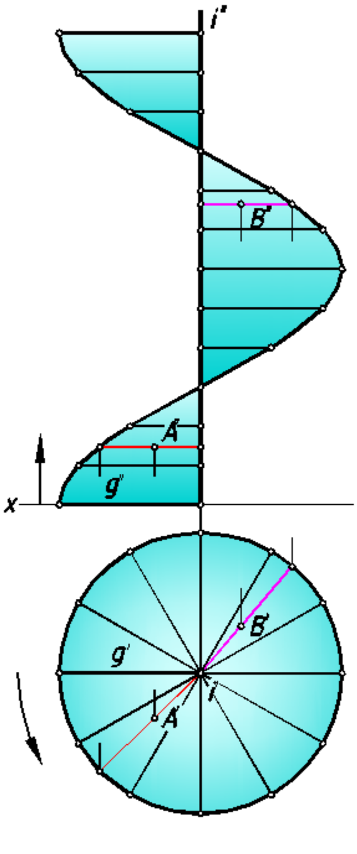


Рис. 163

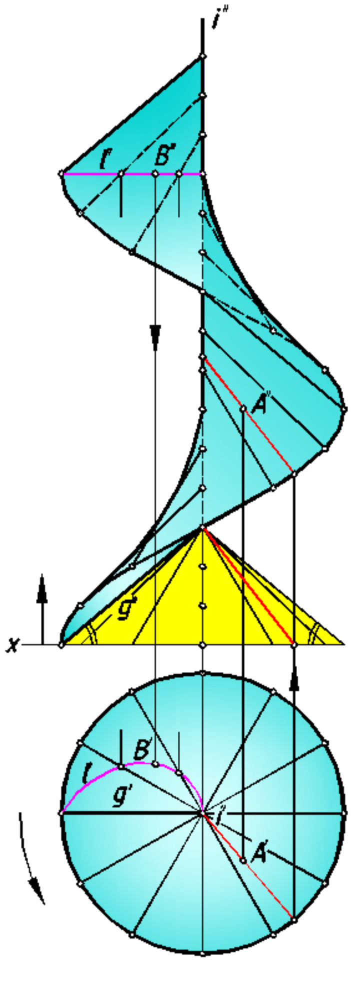


Рис. 164

Для построения такой поверхности необходимо задать ряд последовательных положений образующей в процессе перемещения. При перемещении один конец отрезка скользит по оси поверхности, а второй перемещается по цилиндрической винтовой линии (гелисе).

Цилиндрическую винтовую поверхность также называют *прямым винтовым коноидом*, поскольку образующая при перемещении пересекает две линии, одна из которых кривая (гелиса), а вторая – прямая (ось поверхности). Плоскостью параллелизма является горизонтальная плоскость проекций.

Для задания точки на поверхности нужно задать какую-либо образующую поверхности и на ней взять точку.

На рис.164 задана косая винтовая поверхность, образованная отрезком прямой $\boldsymbol{g}$, не перпендикулярным к оси поверхности.

Построение поверхности аналогично построению прямой винтовой поверхности.

Для построения очерка поверхности на фронтальной плоскости проекций следует провести линию, огибающую проведенные образующие.

Все образующие поверхности равно наклонены к горизонтальной плоскости проекций. Поэтому для построения фронтальных проекций образующих можно использовать вспомогательный конус вращения с образующими, наклоненными к горизонтальной плоскости проекций под тем же углом, что и образующие винтовой поверхности. Такой конус называется *направляющим конусом*. На рис.165 этот конус выделен желтым цветом.

Если задана горизонтальная проекция $\boldsymbol{A'}$ точки $\boldsymbol{A}$, принадлежащей поверхности, для нахождения ее фронтальной проекции нужно задать на поверхности образующую, проходящую через эту точку. Горизонтальная проекция образующей строится просто, т.к. она проходит через проекцию $\boldsymbol{i'}$ оси поверхности и проекцию $\boldsymbol{A'}$ точки. Для построения фронтальной проекции образующей через точку ее пересечения с гелисой нужно провести прямую, параллельную образующей направляющего конуса, либо использовать то обстоятельство, что разность координат $\boldsymbol{z}$ концов образующих постоянна.

Если задана фронтальная проекция $\boldsymbol{B''}$ точки, принадлежащей поверхности, построить фронтальную проекцию образующей, проходящей через эту точку, невозможно, т.к. неизвестен ее наклон к оси. Поэтому воспользуемся любой линией проходящей через эту точку на поверхности. В нашем примере такой линией $\boldsymbol{l}$ является спираль Архимеда.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как образуется винтовая поверхность?*
- *Какие винтовые поверхности называются геликоидами?*
- *Какие геликоиды называются прямыми, а какие - косыми?*
- *Какие геликоиды называются закрытыми, а какие - открытыми?*
- *Что такое направляющий конус косой винтовой поверхности?*

§32. МНОГОГРАННИКИ

Многогранники — один из многих видов геометрических фигур, которые окружают нас.

Многогранник — это геометрическое тело с плоскими гранями, прямыми рёбрами, являющимися границей граней многогранника, и вершинами — точками, в которых сходятся рёбра. Поверхности многогранников являются составными геометрическими фигурами пространства. Существует несколько определений многогранника. Вот ещё одно:

Многогранник (в трехмерном пространстве) — совокупность конечного числа плоских *многоугольников*, расположенных в разных плоскостях, такая, что каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым [10].

Существует множество разновидностей многоугольников. ***Многоугольник*** — это геометрическая фигура на плоскости, заданная последовательностью вершин и сторон.

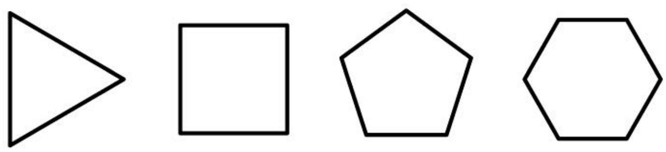
Классические многоугольники являются *простыми выпуклыми*, если отрезок, соединяющий две любые его точки, находится внутри многоугольника, и многоугольник всегда будет находиться по одну сторону от прямой, соединяющей две соседние вершины. При этом любая прямая пересечет выпуклый многоугольник не более чем в двух точках.

Правильными многоугольниками называются те, у которых или все стороны равны, или все углы — *равносторонние* или *равноугольные* соответственно.

В нижеприведенной таблице даны названия правильных многоугольников с числом сторон до десяти:

Название	Число сторон
Треугольник	3
Четырехугольник (квадрат)	4
Пятиугольник (пентагон)	5
Шестиугольник (гексагон)	6
Семиугольник (гептагон)	7
Восьмиугольник (октагон)	8
Девятиугольник (эннеагон)	9
Десятиугольник (декагон)	10

На рис.165 даны примеры некоторых из этих многоугольников.



Треугольник *Квадрат* *Пентагон* *Гексагон*

Рис.165

Отметим, что важнейшим из всех разновидностей многоугольников является ***треугольник***, так как любой из многоугольников можно разбить на треугольники различными способами (рис.166).

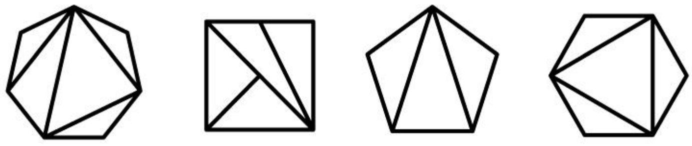


Рис. 166

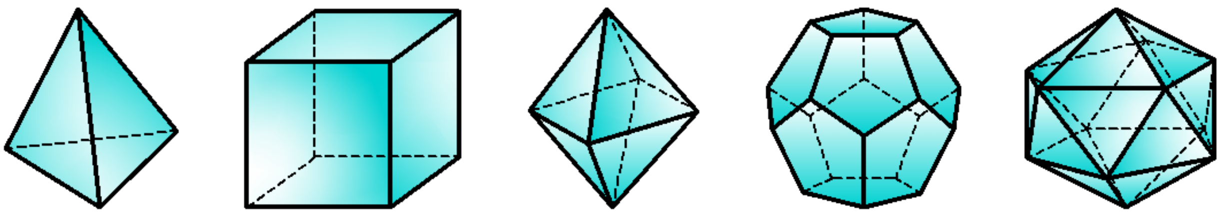
Правильный многогранник — это выпуклый многогранник, все грани которого являются равными правильными многоугольниками, и в каждой вершине которого сходится одинаковое число ребер.

Правильные многогранники называют также «платоновыми телами» в честь выдающегося древнегреческого философа **Платона**, который подробно описал их свойства.

Правильных многогранников всего пять, и некоторые основные данные о них приведены в следующей таблице:

	Тетраэдр	**Куб**	**Октаэдр**	**Додекаэдр**	**Икосаэдр**
Число граней	4	6	8	12	20
Число вершин	4	8	6	20	12
Число ребер	6	12	12	30	30

На рис.167 даны рисунки этих правильных многогранников. Из-за идеального расположения граней этих многогранников *всегда будет существовать сфера, проходящая через все их вершины, другая сфера, касающаяся всех граней, и третья сфера, которая будет касаться всех их ребер.*



Тетраэдр Гексаэдр (Куб) Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

Рис.167

Ещё раз отметим, что поверхности многогранников состоят из конечного числа плоских многоугольников, называемых **гранями**. Две смежные грани пересекаются по **ребру** — общей стороне смежных многоугольников, а три или более граней имеют общую **вершину**. Совокупность всех вершин и ребер многогранной поверхности называется **сеткой многогранника**.

Всякий многогранник должен обладать тремя свойствами:

- иметь конечное число многоугольных граней, общие точки которых определяют ребра или вершины многогранника;

- иметь ребра, которые принадлежат только двум граням;

- иметь вершины, в которых сходятся различные ребра и грани (не менее трех).

Из всего многообразия многогранников для технических специалистов наибольший интерес представляют **призмы, пирамиды и правильные многогранники**.

Призмой называется многогранник, две грани которого являются конгруэнтными n-угольниками, лежащими в параллельных плоскостях и называемыми ***основаниями*** призмы, а остальные грани — параллелограммами, называемыми ***боковыми гранями*** [8]. Если боковые грани являются прямоугольниками, то призма называется ***прямой***.

Пирамидой называется многогранник, одна из граней которого — произвольный многоугольник, называемыми ***основанием***, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину и называемые ***боковыми гранями***. Общая вершина называется ***вершиной пирамиды.***

На чертеже многогранники изображаются проекциями своих сеток, т.е. вершин и ребер.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- Что называется многоугольником? правильным многоугольником?
- Перечислите, какие правильные многоугольники вы знаете?
- Что называется многогранником? правильным многогранником?
- Сколько правильных многогранников вы знаете?
- Что называется гранью?
- Что называется ребром?
- Что называется вершиной многогранника?
- Какими тремя свойствами должен обладать каждый многогранник?
- Что называется призмой? пирамидой?

Глава VII

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР (ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ)

Позиционными задачами принято называть такие, в которых требуется определить положение фигуры относительно плоскостей проекций или их взаимное положение (принадлежность, параллельность, пересечение и непересечение) двух или более фигур.

Две поверхности пересекаются по линии, которая одновременно принадлежит обеим поверхностям. Эта линия состоит из точек, которые принадлежат одновременно каждой из пересекающихся поверхностей. Задача на построение линии пересечения сводится к нахождению этих точек.

Линия с поверхностью пересекается в одной или нескольких точках, которые одновременно принадлежат и линии и поверхности. Задачу построения точек пересечения линии с поверхностью называют **первой основной позиционной задачей**. Задача построения линии пересечения двух поверхностей называется **второй основной позиционной задачей.**

При решении задач на пересечение геометрических фигур (линий, поверхностей) между собой необходимо учитывать расположение этих фигур относительно плоскостей проекций. Решение задачи значительно упрощается, если хотя бы одна из фигур занимает проецирующее положение относительно какой–либо плоскости проекций. Прямая в этом случае проецируется на плоскость проекций в точку, а поверхность — в линию.

Проекция линии пересечения, как принадлежащая обеим пересекающимся фигурам, должна принадлежать одноименным проекциям пересекающихся фигур. Следовательно, при пересечении проецирующей прямой с поверхностью одна из проекций точки пересечения известна как принадлежащая вырожденной в точку проекции прямой. При пересечении поверхностей, одна из которых занимает проецирующее положение, одна из проекций линии пересечения также известна как принадлежащая вырожденной в линию проекции проецирующей поверхности.

Во всех этих случаях мы фактически имеем на чертеже одну проекцию элемента пересечения. Вторую проекцию находим исходя из условия, что этот элемент принадлежит второй фигуре, которая не занимает проецирующего положения относительно плоскостей проекций.

§33. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости пересекаются по прямой линии, общей для этих плоскостей.
При пересечении плоскостей возможны четыре случая:

1. Обе плоскости перпендикулярны одной и той же плоскости проекций (рис.168).
2. Плоскости перпендикулярны разным плоскостям проекций (рис.169).
3. Одна из плоскостей перпендикулярна плоскости проекций, а вторая общего положения (рис.170, 171).
4. Обе плоскости общего положения (рис.172).

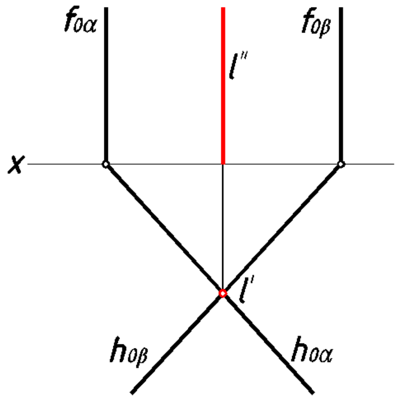


Рис. 168

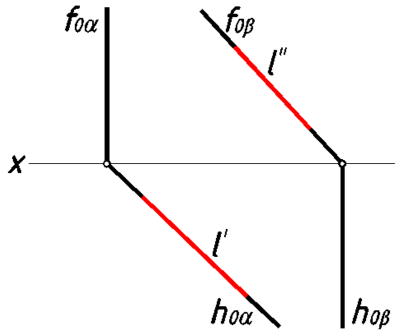


Рис. 169

На рис.168 пересекающиеся плоскости перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. Исходя из принадлежности прямой пересечения плоскости α её горизонтальная проекция l' должна совпадать с горизонтальным следом $h_{o\alpha}$ плоскости α. Исходя из принадлежности прямой пересечения плоскости β её горизонтальная проекция l' должна совпадать с горизонтальным следом $h_{o\beta}$ этой плоскости.

Горизонтальные следы плоскостей имеют одну общую точку, в которую и проецируется прямая l. Если прямая проецируется в точку, то она перпендикулярна этой плоскости проекций, следовательно, фронтальная ее проекция перпендикулярна оси проекций.

В случае, когда пересекающиеся плоскости перпендикулярны различным плоскостям проекций (рис.169), проекции линии l' и l'' пересечения находятся на соответствующих следах $h_{o\alpha}$ и $f_{o\beta}$ пересекающихся плоскостей.

В случае, когда одна из пересекающихся плоскостей проецирующая, а вторая общего положения, то одна из проекций линии пересечения совпадает со следом проецирующей плоскости.

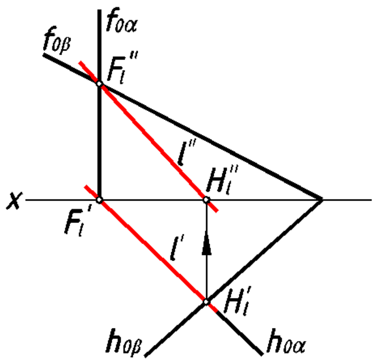


Рис. 170

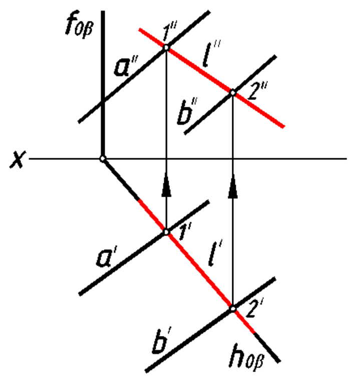


Рис. 171

На рис.170 и рис.171 плоскость α занимает проецирующее положение относительно π_1, поэтому горизонтальная проекция l' прямой пересечения заданных плоскостей, совпадает с горизонтальным следом $h_{o\alpha}$ этой плоскости. Вторую проекцию l'' прямой пересечения находим, исходя из принадлежности прямой пересечения второй плоскости (общего положения). В задаче на рис.170 для построения фронтальной проекции прямой использованы следы H_l и F_l этой прямой, а в задаче на рис 171 — точки 1 и 2 пересечения этой прямой с прямыми a и b.

При пересечении двух плоскостей общего положения проекции l' и l'' прямой их пересечения строят, находя две точки, общие для пересекающихся плоскостей. Если плоскости заданы следами, такими точками являются следы H_l и F_l прямой (рис.172).

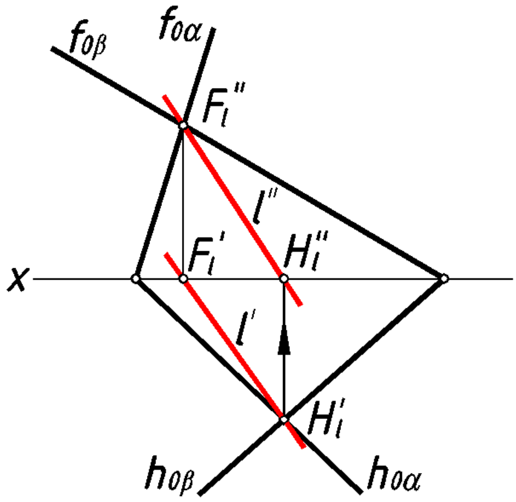


Рис. 172

Общий прием, позволяющий находить общие точки для пересекающихся плоскостей, называется способом вспомогательных секущих плоскостей. Заключается он в следующем (рис.173). Заданные плоскости α и β пересекают вспомогательной плоскостью γ, находят прямые m_1 и n_1 пересечения этой плоскости с заданными и на пересечении построенных прямых находят точку K_1, общую для плоскостей. Для получения второй точки вводят еще одну вспомогательную плоскость δ, находят прямые m_2 и n_2 и на их пересечении искомую точку K_2. Прямая l, проходящая через точки K_1 и K_2, является линией пересечения плоскостей α и β.

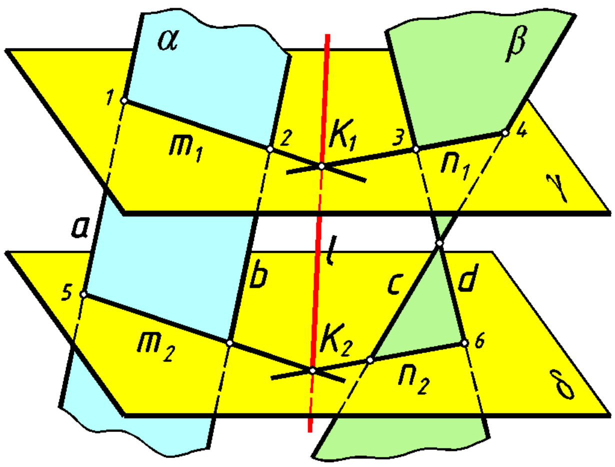


Рис. 173

На рис. 174 одна из плоскостей общего положения задана параллельными прямыми a и b, а вторая — треугольником ABC. Для упрощения решения задачи вспомогательные плоскости следует взять проецирующими.

Вспомогательная плоскость γ параллельна горизонтальной плоскости проекций. Она пересекает заданные плоскости по горизонталям h_1 и h_2. На пересечении этих горизонталей находится точка **4**, общая для пересекающихся плоскостей.

Вторая вспомогательную плоскость δ взята параллельной плоскости γ. Она пересекает заданные плоскости по горизонталям h_3 и h_4, которые параллельны соответственно горизонталям h_1 и h_2. Точка **7** пересечения этих горизонталей задает еще одну точку, общую для заданных плоскостей. Прямая l, проходящая через точки **4** и **7**, есть линия пересечения заданных плоскостей.

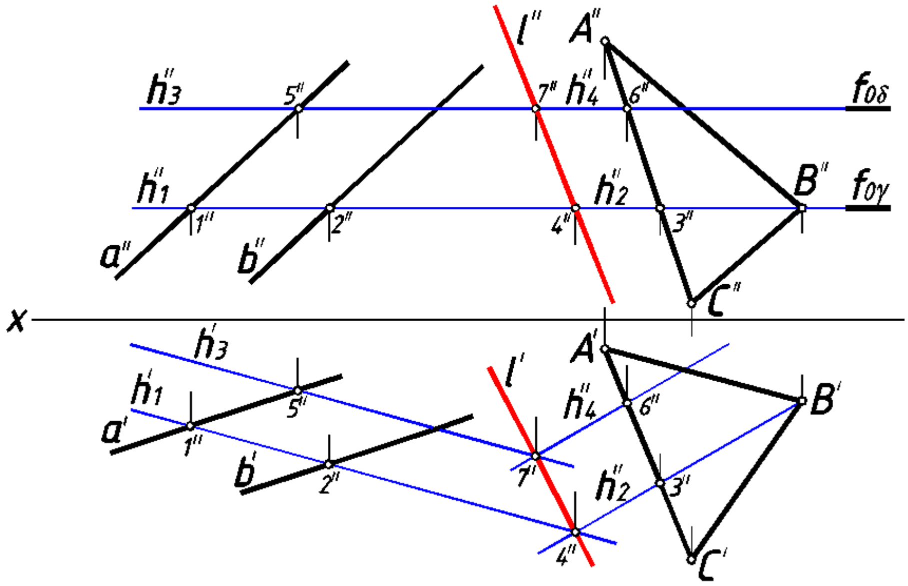


Рис. 174

Если обе плоскости заданы следами (рис.172), то плоскости проекций можно принять за вспомогательные секущие плоскости, а следы заданных плоскостей - за линии их пересечения со вспомогательными секущими плоскостями. Пересечение одноимённых следов заданных плоскостей дают две точки, принадлежащие прямой пересечения этих плоскостей. Эти точки являются следами искомой прямой.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Что называется линией пересечения двух поверхностей?*
- *Что является линией пересечения двух плоскостей?*
- *Из каких точек состоит линия пересечения двух поверхностей?*
- *К чему сводится решение задачи построения линии пересечения двух плоскостей? двух поверхностей?*
- *Почему проецирующее положение одной из поверхностей упрощает решение задачи на построение проекций линии пересечения поверхностей?*
- *По какой прямой пересекаются две плоскости, перпендикулярные одной и той же плоскости проекций?*
- *Где находится одна из проекций линии пересечения в случае, когда одна из пересекающихся плоскостей - проецирующая?*
- *Как построить проекции линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных следами?*
- *В чем заключается способ вспомогательных секущих плоскостей, применяемый для построения линии пересечения плоскостей в обще случае?*

§34. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Рассмотрение этого типа задач начинаем с частных случаев пересечения прямой с плоскостью.

34.1. Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения

На рис.175 задана проецирующая прямая $\boldsymbol{l}$ и плоскость общего положения $\boldsymbol{\alpha}$ треугольником $\boldsymbol{ABC}$.

Прямая $\boldsymbol{l}$ — горизонтально проецирующая, все точки которой на горизонтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\pi_1}$ проецируются в вырожденную проекцию $\boldsymbol{l'}$, включая проекцию точки пересечения $\boldsymbol{K'}$.

Т.к. точка $\boldsymbol{K}$ принадлежит плоскости треугольника $\boldsymbol{ABC}$, то по условиям принадлежности она должна принадлежать линии этой плоскости. Проведем через точку $\boldsymbol{K'}$ прямую $\boldsymbol{B'D'}$ в плоскости треугольника.

Три точки — $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{K}$ — принадлежат одной прямой треугольника $\boldsymbol{ABC}$. Построив фронтальную проекцию отрезка $\boldsymbol{BD}$ — $\boldsymbol{B''D''}$, находим фронтальную проекцию точки пересечения — $\boldsymbol{K''}$.

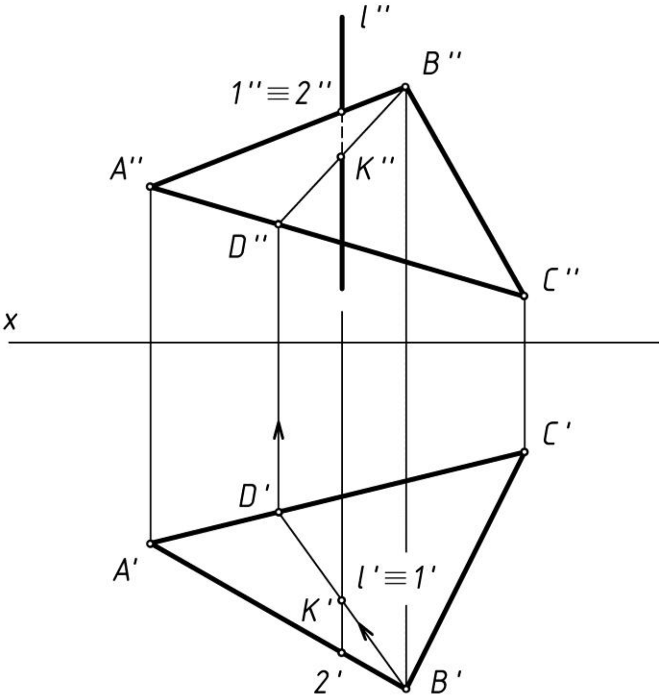


Рис. 175

Для придания чертежу большей наглядности необходимо определить видимость прямой до и после точки пересечения с плоскостью, которую считаем ***непрозрачной***. Те точки прямой, которые будут ближе к наблюдателю чем точки плоскости, изображаются основными линиями. Это можно определять по ***конкурирующим точкам*** — двум точкам, принадлежащим разным геометрическим фигурам, но проекции которых на одной из плоскостей проекций совпадают. В нашем примере это точки $\boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{2}$. Точка $\boldsymbol{1}$ принадлежит прямой $\boldsymbol{l}$, а точка $\boldsymbol{2}$ принадлежит отрезку $\boldsymbol{AB}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$. Фронтальные проекции этих точек совпадают ($\boldsymbol{1''}$ = $\boldsymbol{2''}$). Расстояние от этих точек до наблюдателя будет определяться координатой $\boldsymbol{y}$.

Точка с бо́льшей координатой будет видимой, т.е. $y_2 > y_1$ и точка ***2*** на π_2 будет видимой вместе с отрезком ***AB***. Отрезок ***1K*** прямой ***l*** будет невидимым на фронтальной проекции.

Следует помнить, что, ***как правило***, проекция точки пересечения прямой с плоскостью (поверхностью) делит изображение проекции прямой на видимую и невидимую часть. Невидимая часть прямой изображается штриховой линией.

34.2. Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью

На рис.176 даны прямая ***l*** и плоскость ***α***, заданная параллельными прямыми ***a*** и ***b*** и перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций π_1.

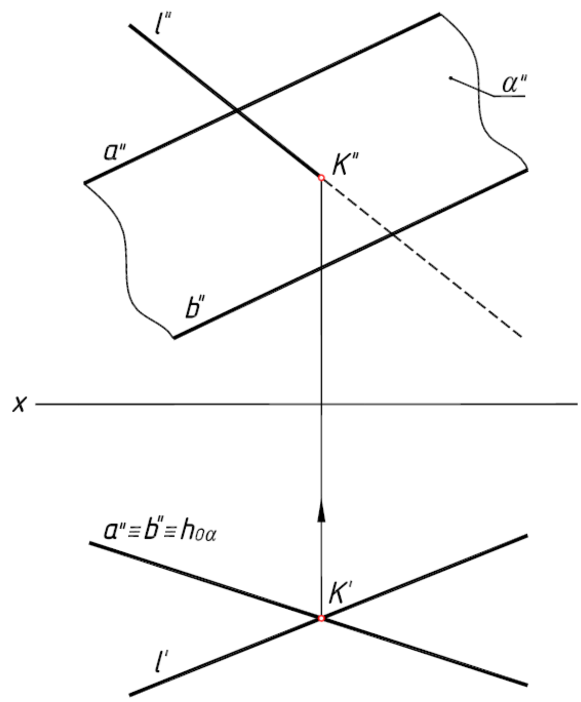


Рис.176

Все точки, принадлежащие плоскости ***α***, на горизонтальную плоскость проекций π_1 спроецируются в вырожденную проекцию плоскости — прямую, совпадающую со следом этой плоскости ***hoα***. Поэтому горизонтальная проекция точки пересечения прямой ***l*** с плоскостью определяется как точка пересечения ***hoα*** и ***l'*** — получаем проекцию ***K'***. Фронтальную проекцию ***K''*** определяем по принадлежности прямой ***l***. Видимость проекции прямой ***l''*** на фронтальной плоскости проекций определяем по конкурирующим точкам подобно предыдущему примеру. На горизонтальной плоскости проекций проекция прямой ***l'*** видимая до и после точки пересечения. Поэтому в предыдущем примере мы оговорили, что «как правило», проекция точки пересечения прямой с плоскостью (поверхностью) делит изображение проекции прямой на видимую и невидимую часть». В нашем случае это исключение из правил.

34.3. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

На рис.177 рассмотрена задача пересечения прямой l и плоскости общего положения α, заданной треугольником ABC.

В этом случае решение задачи сводится к следующему алгоритму:

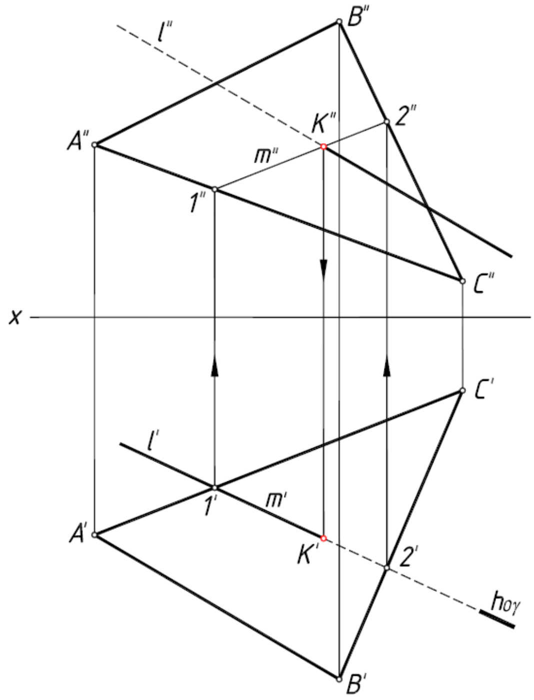


Рис.177

1) Прямую l заключаем во вспомогательную проецирующую плоскость γ, (в нашем случае, в горизонтально проецирующую, заданную следом $h_{0\gamma}$);

2) Строим линию пересечения m плоскостей α (ΔABC) и γ по двум общим точкам ***1*** и ***2***. Точка ***1*** — результат пересечения отрезка AC с плоскостью γ, точка ***2*** — пересечения BC с плоскостью γ (как в случае пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью).

3) На фронтальной плоскости проекций находим точку ***К*** пересечения прямых l и m как принадлежащих одной плоскости γ.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как определяется видимость прямой линии, пересекающейся с плоскостью?*
- *Как проекция точки пересечения прямой с плоскостью делит изображение проекции прямой?*
- *Сформулируйте общий алгоритм решения задачи пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения.*

§35. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

35.1. Сечение многогранника плоскостью

Поверхность многогранника называется составной поверхностью, т.к. состоит из нескольких плоских многоугольников. Особенностью алгоритма построения линии пересечения плоскости с составной поверхностью является то, что линия пересечения будет также составная плоская замкнутая ломаная линия — многоугольник [8].

Существуют два способа построения сечения многогранника плоскостью:

1) **Способ ребер** – когда определяются вершины многоугольника сечения;
2) **Способ граней** – когда определяются стороны многоугольника сечения.

При первом способе вершины многоугольника определяются многократным решением задачи на построение точек пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. Этот способ в случае, когда ребра многогранника являются проецирующими.

Второй способ сводится к многократному решению задачи на построение линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью. Этот способ удобно использовать, если некоторые грани многогранника являются проецирующими плоскостями. В ряде случаев целесообразно комбинированное использование обоих способов.

Пример использования способа граней рассмотрен на рис.178 при сечении плоскостью общего положения α правильной прямой шестигранной призмы $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$.

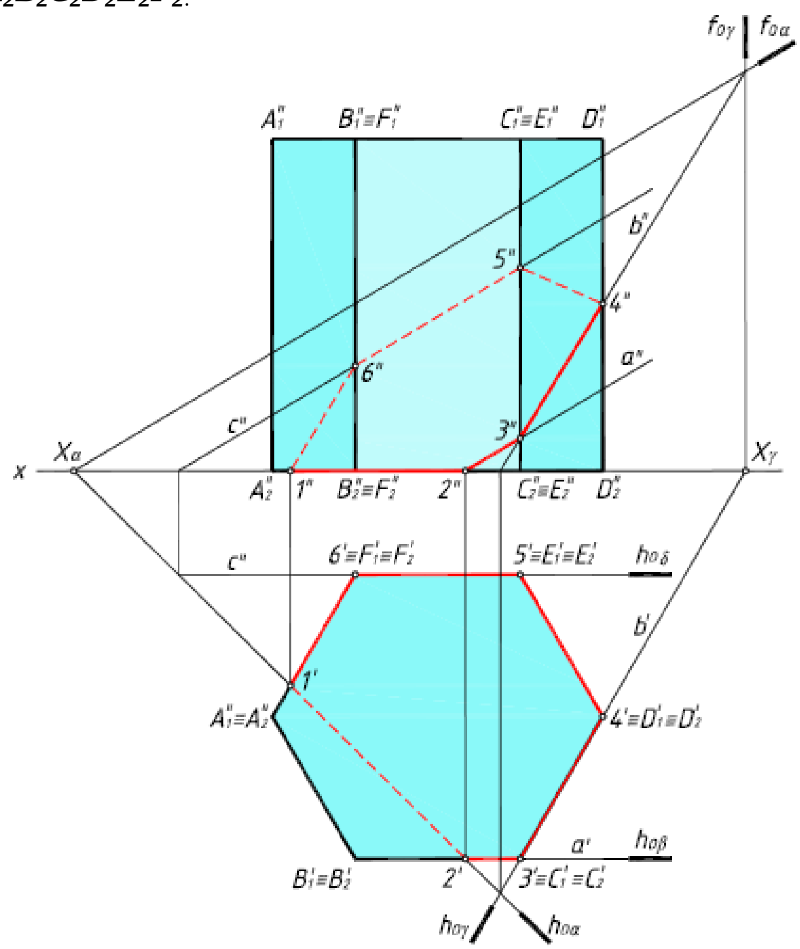


Рис. 178

Горизонтальная проекция линии пересечения плоскости α с нижним основанием призмы совпадает с горизонтальным следом $h_{0\alpha}$ секущей плоскости. На этой линии находятся точки ***1*** и ***2*** пересечения ее с нижним основанием призмы.

Линию a пересечения секущей плоскости α с передней гранью призмы найдем, заключив ее в горизонтально проецирующую плоскость β. На этой линии находятся точки ***2*** и ***3*** пересечения ее с ребрами призмы.

Заключив грань $C_1D_1C_2D_2$ в горизонтально проецирующую плоскость γ, найдем прямую b пересечения ее с плоскостью α. На этой прямой находятся точки ***3*** и ***4*** пересечения ее с ребрами призмы.

Заключив грань $E_1F_1E_2F_2$ в горизонтально проецирующую плоскость δ, найдем прямую b пересечения ее с плоскостью α. На этой прямой находятся точки ***5*** и ***6*** пересечения ее с ребрами призмы.

Соединив последовательно все найденные точки ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5*** и ***6*** получим замкнутую фигуру сечения многогранника плоскостью общего положения α.

35.2. Пересечение прямой общего положения с многогранником

Прямая может пересекать многогранную поверхность в нескольких точках, различных или совпавших. Число k точек пересечения зависит от взаимного положения прямой и многогранника. При этом,

$$0 \le k \le n$$

Здесь n – число граней многогранной поверхности.

Например, прямая, проходящая через противоположные вершины куба, пересекает все шесть его граней в двух, по три совпавших, точках.

Общий алгоритм решения задачи рассматривался ранее в

Общий алгоритм решения задачи включает три шага:

1) *Прямая заключается в плоскость-посредник* γ;
2) *Находится линия пересечения поверхности многогранника и плоскости* γ;
3) *Определяются точки пересечения этой линии пересечения и исходной прямой как лежащие в одной плоскости* γ.

Качество и быстрота решения зависят от правильно выбранной плоскости-посредника. В большинстве случаев удобно использовать проецирующие плоскости из-за того, что одна проекция точек пересечения сразу известна. Но иногда удобнее воспользоваться плоскостью общего положения.

Алгоритм решения задачи пересечения прямой общего положения с многогранником рассмотрим на примере пересечения прямой l с пирамидой ***SABCD*** (рис.179).

Заключаем прямую a во фронтально проецирующую плоскость γ. Она пересекает призму ***SABCD*** по четырехугольнику ***EFGH***. Прямая a пересекает стороны ***FG*** и ***EH*** в точках K_1 и K_2, которые являются искомыми точками пересечения этой прямой с пирамидой.

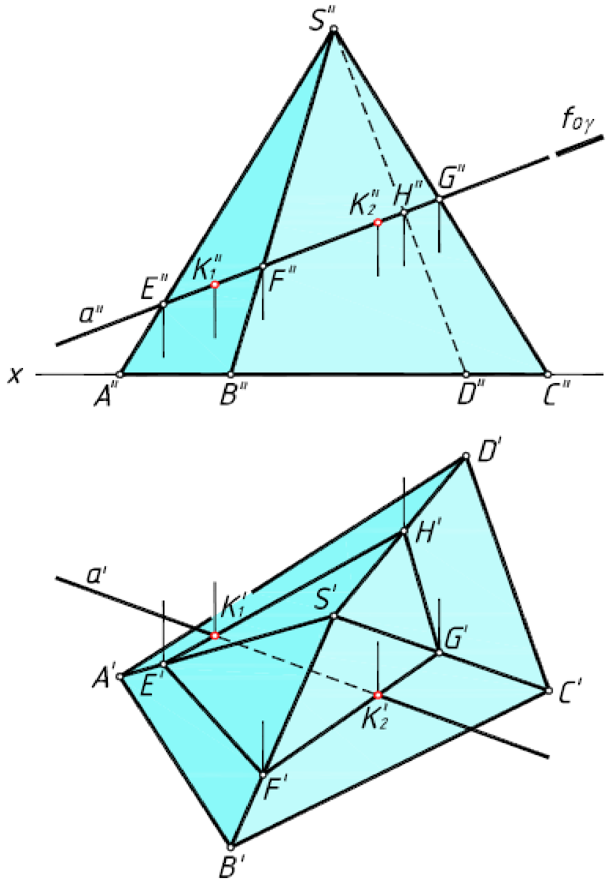


Рис. 179

35.3. Пересечение поверхностей двух многогранников

В общем случае два многогранника пересекаются по пространственной замкнутой ломаной линии. В частных случаях эта ломаная линия может распадаться на две и более замкнутые ломаные линии. Вершинами ломаной являются точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого. Стороны ломаной линии представляют собой отрезки прямых, по которым пересекаются грани многогранников. Отсюда следуют, как и в предыдущем параграфе, два способа построения линии пересечения поверхностей многогранников:

1) **Способ ребер** — построение вершин ломаной как точек пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого. При этом, найденные точки соединяются в определенной последовательности, соблюдая следующее правило*: прямыми соединяются лишь те точки, которые принадлежат одной грани.*
2) **Способ граней** — построение сторон ломаной как отрезков прямых попарного пересечения граней данных многогранников.

Выбор способа зависит от свойств пересекающихся многогранников. Построения упрощаются, если вершины и стороны ломаной линии определяются соответственно как точки и прямые пересечения граней общего положения одного многогранника с проецирующими ребрами и гранями другого.

При построении линии пересечения поверхностей двух пирамид, призмы и пирамиды, двух призм в качестве вспомогательных плоскостей можно использовать плоскости общего положения:

1) Если строится линия пересечения поверхностей двух пирамид, то вспомогательные плоскости должны проходить через вершины пирамид;
2) Если строится линия пересечения поверхностей пирамиды и призмы, то вспомогательные плоскости должны проходить через вершину пирамиды параллельно боковым ребрам призмы;
3) Если строится линия пересечения поверхностей двух призм, вспомогательные плоскости должны проходить параллельно боковым ребрам обеих призм.

Указанные плоскости пересекают поверхность пирамиды по прямым, проходящим через ее вершину, а поверхность призмы — по прямым, параллельным ее ребрам. Это в ряде случаев сокращает объем графических построений и позволяет заранее определить те грани одного многогранника, с которыми пересекаются ребра другого.

Рассмотрим два конкретных примера.

Пример 1. Построить линию пересечения поверхностей четырехгранной призмы и трехгранной пирамиды (см. рис.180) Поскольку грани призмы горизонтально проецирующие плоскости, то, воспользовавшись *способом ребер*, определяем точки пересечения ребер ***SA, SB, SC*** пирамиды с гранями призмы просто: горизонтальные проекции их точек пересечения ***1'*** и ***4'***, ***2'*** и ***6'***, ***3'*** и ***7'*** получаются как пересечение указанных ребер с вырожденными проекциями граней призмы.

Из боковых ребер призмы только ребро N_1N_2 пересекается с поверхностью пирамиды. Для определения точек ***5*** и ***8*** её пересечения с поверхностью пирамиды через неё проведем горизонтально проецирующую плоскость γ, проходящую через вершину пирамиды ***S***. Плоскость γ пересекает грани ***SAB*** и ***SAC*** пирамиды по прямым ***S10*** и ***S9***, которые, пересекаясь с N_1N_2, определяют недостающие вершины ***5*** и ***8*** искомой линии пересечения. Она состоит из двух замкнутых ломаных ***1-2-3-1*** и ***5-6-7-8-5.***

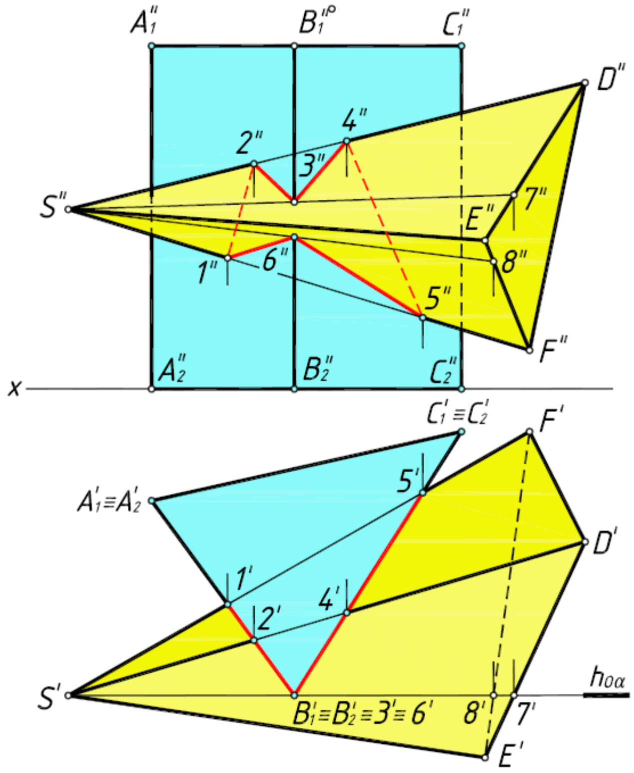


Рис. 180

<u>Пример 2.</u> Построить линию пересечения трехгранной пирамиды ***SABC*** с прямоугольной призмой (рис.181).

Поскольку грани $D_1E_1D_2E_2$ и $G_1F_1G_2F_2$ призмы фронтально проецирующие, а грани $E_1F_1E_2F_2$ и $D_1G_1D_2G_2$ — горизонтально проецирующие, воспользуемся *способом граней*

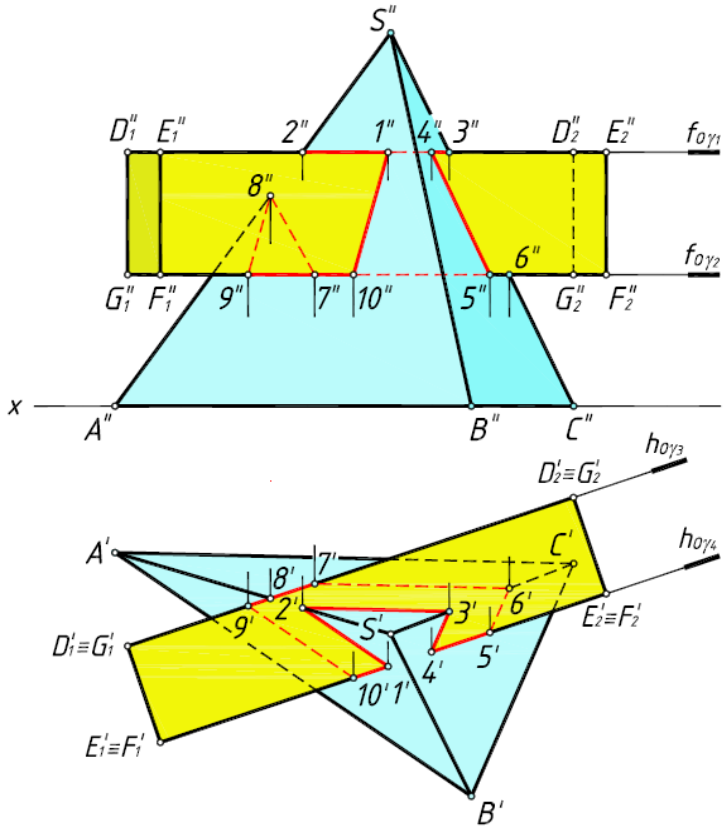


Рис. 181

Сначала построим сечение пирамиды плоскостью γ_1 верхней грани призмы.

Из полученного треугольного сечения выделяем ломанную ***1-2-3-4***, расположенную в пределах верхней грани призмы.

Затем строим треугольное сечение пирамиды плоскостью γ_2 нижней грани призмы. Выделяем участки ломанной ***5-6-7*** и ***9-10***, расположенные в пределах нижней грани.

Поскольку точки ***4*** и ***5*** принадлежат одновременно грани ***SBC*** пирамиды и передней грани призмы, совпадающей с плоскостью γ_4, значит, отрезок ***4-5*** является линией их пересечения. Аналогично, отрезок ***1-10*** является линией пересечения грани ***SAB*** пирамиды и передней грани призмы. Точки ***7*** и ***9*** принадлежат задней грани призмы, но различным граням ***SAC*** и ***SAB*** пирамиды. Поэтому находим точку ***8*** пересечения задней грани призмы с ребром ***SA*** пирамиды. Горизонтальная проекция ***8'*** точки ***8*** определяется как точка пересечения ***S' A'*** с вырожденной проекцией задней грани призмы β_2, совпадающей со следом $h_{0\beta 2}$. Эта задняя грань призмы является фронтальной плоскостью уровня.

Замкнутая пространственная ломаная линия ***1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-1*** представляет собой искомую линию пересечения поверхностей заданных многогранников.

§36. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ ЗАНИМАЕТ ПРОЕЦИРУЮЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Кроме плоскости только цилиндрическая поверхность может проецироваться на плоскость проекций в линию. На рис.182 представлено пересечение поверхности цилиндра вращения с плоскостью α общего положения. Плоскость пересекает цилиндрическую поверхность по эллипсу.

На горизонтальную плоскость проекций эллипс проецируется в окружность, а на фронтальную плоскость проекций — в эллипс.

Для нахождения фронтальной проекции линии пересечения необходимо найти фронтальные проекции ряда точек, принадлежащих линии пересечения, по их принадлежности плоскости.

Сначала найдём проекции высшей и низшей точек линии пересечения (точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$). Эти точки расположены в плоскости β, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через ось цилиндрической поверхности (на линии ската плоскости α).

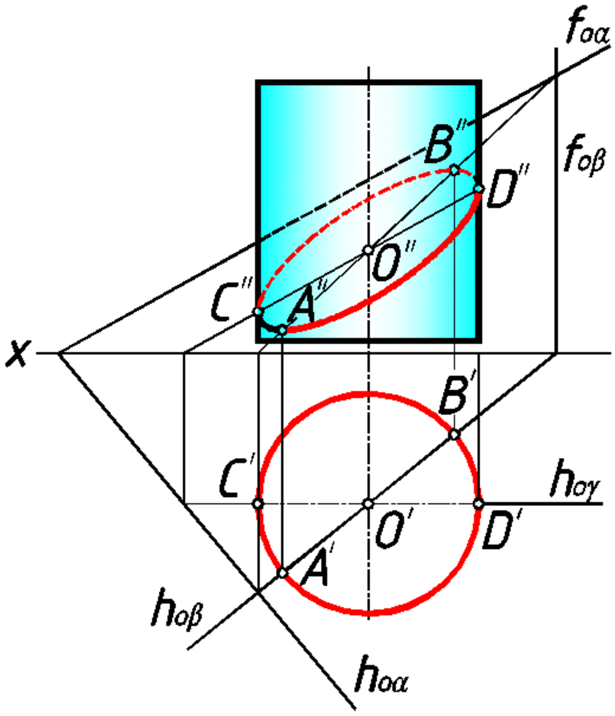


Рис. 182

На фронтальной проекции часть линии пересечения, расположенная на передней части цилиндрической поверхности будет видимой, а на противоположной части — невидимой.

Границей видимости являются точки $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$, расположенные в плоскости главного меридиана цилиндрической поверхности (в плоскости γ). Находим их фронтальные проекции по принадлежности этих точек плоскости α.

Аналогично можно находить фронтальные проекции любых точек, принадлежащих линии пересечения.

На рис.183 проецирующая плоскость α пересекает все образующие цилиндрической поверхности. Линия пересечения — эллипс. Его фронтальная проекция

e'' — отрезок прямой, совпадающий со следом $f_{o\alpha}$ секущей плоскости. Горизонтальная проекция e' — окружность.

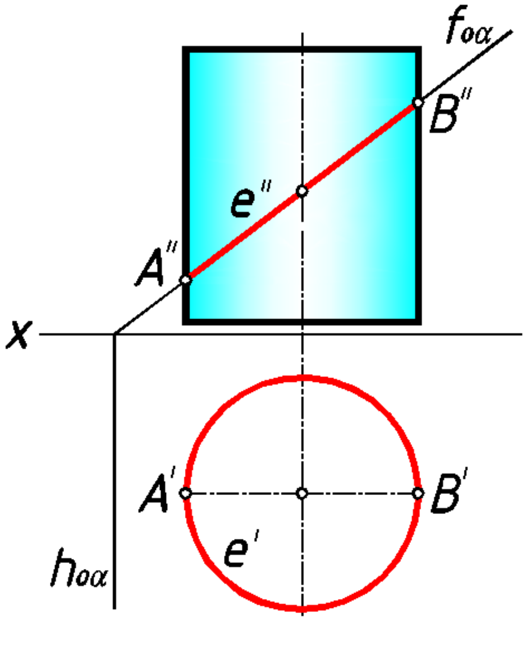


Рис.183

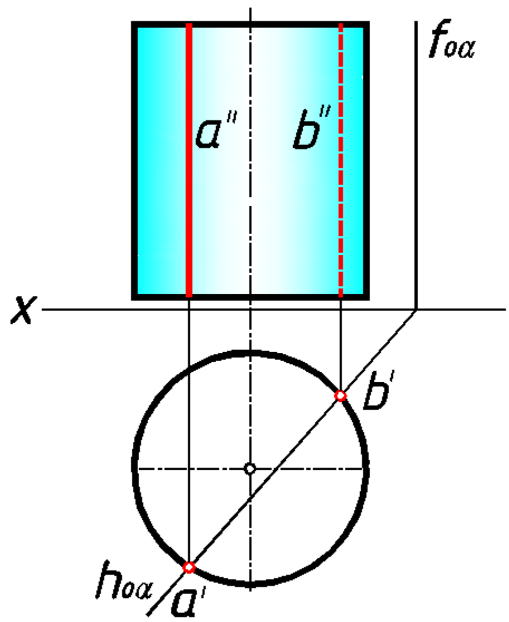


Рис.184

На рис. 184 горизонтально проецирующая плоскость α параллельна образующим цилиндрической поверхности, поэтому пересекает цилиндрическую поверхность по образующим a и b. Горизонтальные проекции этих образующих принадлежат пересечению горизонтального следа этой плоскости с окружностью, в которую проецируется цилиндрическая поверхность на горизонтальную плоскость проекций.

Рассмотрим пересечение проецирующей плоскости с конической поверхностью вращения.

На рисунках 185, 186 и 187 представлены варианты линий пересечения с конической поверхностью плоскостей при различном их расположении относительно образующих конической поверхности.

1. Если плоскость α_1 проходит через вершину конической поверхности S и пересекает эту поверхность в единственной точке (в вершине), то всякая параллельная ей плоскость α_2 пересечет коническую поверхность по эллипсу e (рис.185). В частном случае, когда плоскость α_3 перпендикулярна оси конуса, она пересекает коническую поверхность по окружности c (по эллипсу с равными осями).

Горизонтальная проекция вершины конуса S' является одним из фокусов горизонтальной проекции e' эллипса.

Угол наклона секущей плоскости к оси конуса в этом случае больше угла наклона образующих к оси.

2. Если плоскость β_1 проходит через вершину конической поверхности S и касается поверхности конуса по прямой a, то всякая параллельная ей плоскость β_2 пересечет коническую поверхность по параболе p (рис.186).

Горизонтальная проекция вершины конуса S' является фокусом горизонтальной проекции p' параболы.

Угол наклона секущей плоскости к оси конуса в этом случае равен углу наклона образующих к оси.

3. Если плоскость γ_1 проходит через вершину конической поверхности S и пересекает поверхность по двум образующим a и b, то всякая параллельная ей плоскость γ_2 пересечет коническую поверхность по гиперболе g (рис.187).

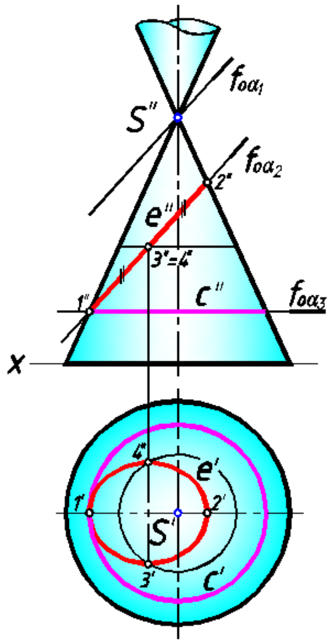


Рис. 185

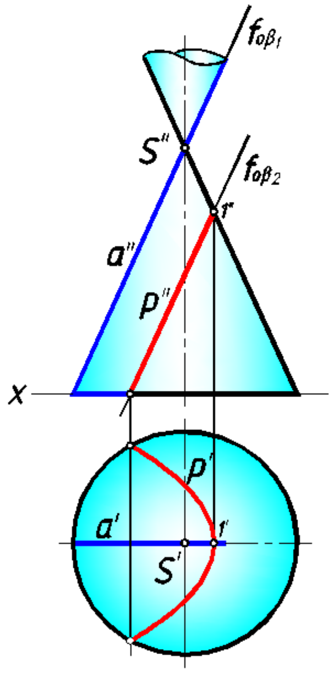


Рис. 186

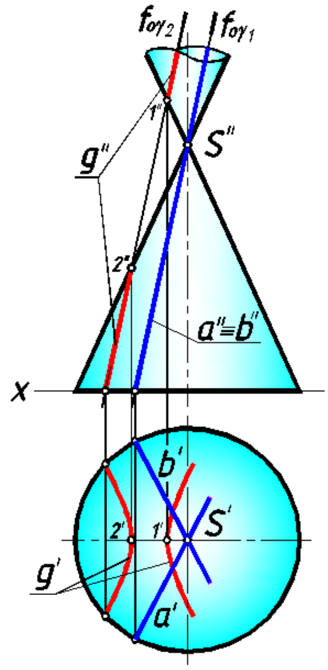


Рис. 187

Горизонтальная проекция вершины конуса S' является одним из фокусов горизонтальной проекции g' гиперболы.

Угол наклона секущей плоскости к оси конуса в этом случае меньше угла наклона образующих к оси.

Рассмотрим пересечение фронтально проецирующей плоскости со сферой (рис.188).

Любая плоскость пересекает сферу по окружности.

На фронтальную плоскость проекций окружность проецируется в отрезок $A''B''$ совпадающий с фронтальным следом плоскости и равный диаметру окружности.

На горизонтальную плоскость проекций окружность проецируется в эллипс.

Большая ось эллипса равна диаметру окружности сечения, т.е. величине фронтальной проекции этой окружности, а малая ось равна проекции отрезка AB на горизонтальную плоскость проекций.

Точки E_1 и E_2 (граница видимости кривой) расположены на экваторе сферы.

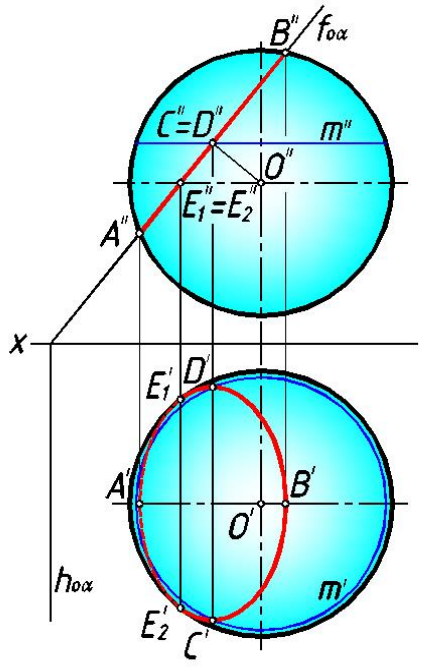


Рис.188

На рис.189 представлено построение линии пересечения проецирующей плоскости α с поверхностью тора.

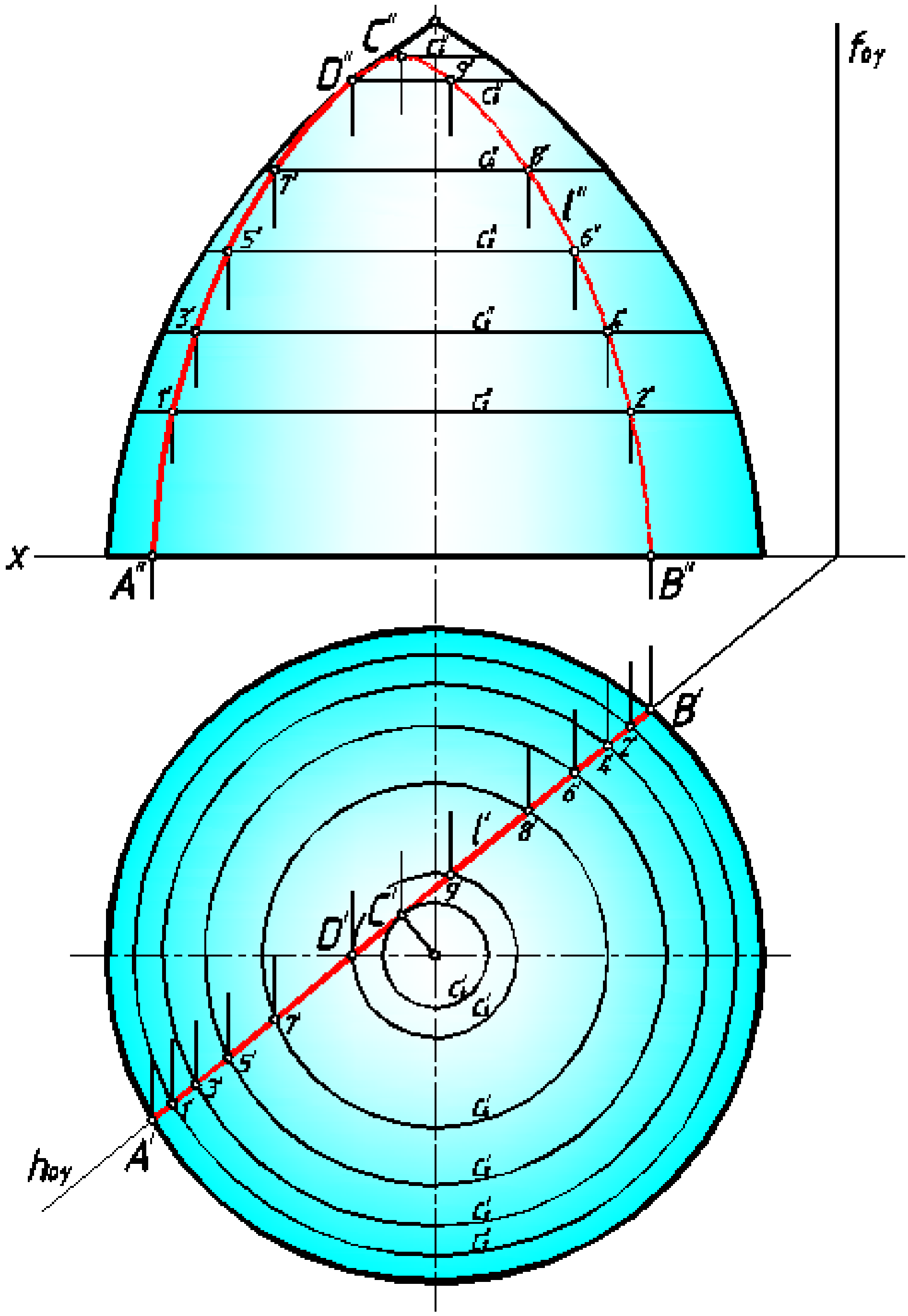


Рис.189

В силу того, что плоскость заданная на чертеже перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, на горизонтальную плоскость проекций линия пересечения проецируется отрезком прямой ***A'B'***, совпадающим со следом $h_{0\alpha}$ плоскости. Фронтальную проекцию линии пересечения строят, проводя на поверхности параллели c_1, c_2, $c_3 \ldots c_6$ и находя на них точки ***1, 2, 3…9***, принадлежащие линии пересечения.

Характерными точками линии пересечения являются точки ***A***, ***B***, ***C*** и ***D***. Точки ***A*** и ***B*** (начальная и конечная точки дуги) находятся на основании тора. Точка ***C*** (наивысшая точка кривой) находится на параллели c_6, касательной к горизонтальной проекции линии пересечения. Точка ***D*** (граница видимости кривой) находится на фронтальном меридиане поверхности.

На рис.191 показано пересечение сферы с прямым круговым цилиндром, который занимает проецирующее положение относительно горизонтальной плоскости проекций.

Горизонтальная проекция линии пересечения уже известна. Она совпадает с окружностью, в которую проецируется цилиндрическая поверхность на горизонтальную плоскость проекций.

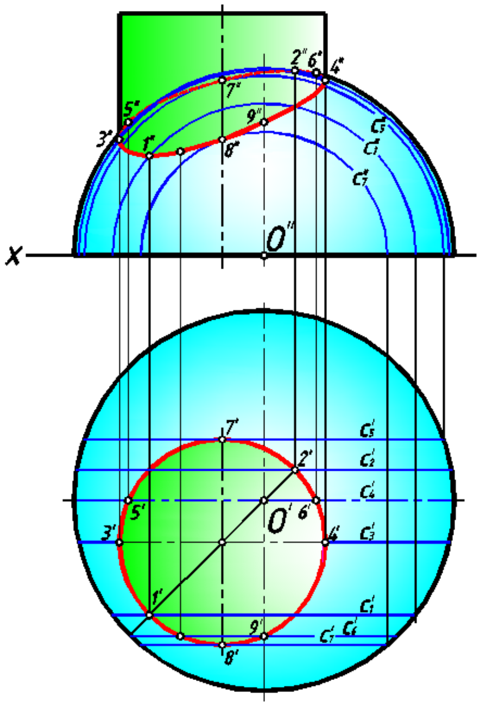


Рис.190

Фронтальную проекцию линии пересечения строят, исходя из её принадлежности поверхности сферы, с помощью окружностей c_1, c_2, c_3…c_6 и находя на них точки ***1***, ***2***, ***3***…***9***, принадлежащие линии пересечения.

Сначала находят проекции характерных точек линии пересечения. Низшая точка ***1*** и высшая точка ***2*** принадлежат плоскости, проходящей через центр сферы и ось цилиндрической поверхности.

Точки ***3*** и ***4***, являющиеся границей видимости кривой при проецировании на фронтальную плоскость проекций, расположены на образующих цилиндрической поверхности, являющихся очерком этой поверхности на фронтальной плоскости проекции.

Точки ***5*** и ***6*** принадлежат главному меридиану сферы.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какие поверхности могут занимать проецирующее положение относительно плоскостей проекций?*
- *Какие линии являются проекциями линии пересечения проецирующей цилиндрической поверхности с плоскостью общего положения?*
- *Какие линии являются проекциями линии пересечения проецирующей цилиндрической поверхности с проецирующей плоскостью, произвольно наклоненной к оси поверхности?*
- *По каким линиям плоскость, параллельная оси цилиндра, пересекает его поверхность?*
- *В каких случаях плоскость пересекает коническую поверхность вращения по двум пересекающимся прямым, по окружности, по эллипсу, по параболе, по гиперболе?*
- *По какой линии плоскость пересекает сферу?*
- *Какие точки линии пересечения поверхностей относятся к характерным (опорным) точкам?*

§37. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

В этом случае применяют особый приём для нахождения точек, принадлежащих линии пересечения, который называется способом вспомогательных секущих поверхностей (рис.191).

Суть этого способа состоит в том, что для нахождения точки линии пересечения поверхностей α и β вводят вспомогательную поверхность γ и определяют линии m_1 и n_1 пересечения вспомогательной поверхности с заданными.

На пересечении полученных линий расположена точка K_1, принадлежащая как вспомогательной поверхности, так и пересекающимся поверхностям. То есть, эта точка принадлежат линии пересечения поверхностей.

Вводя ряд вспомогательных поверхностей, находим достаточное количество точек, определяющих линию пересечения.

В качестве вспомогательных поверхностей можно использовать как кривые поверхности, так и плоскости. В последнем случае описанный способ называют способом вспомогательных секущих плоскостей.

Вспомогательную поверхность следует выбирать таким образом, чтобы можно было легко находить линию пересечения её с поверхностями, и чтобы эта линия пересечения проецировалась на плоскость проекций в виде простых линий (прямых или окружностей).

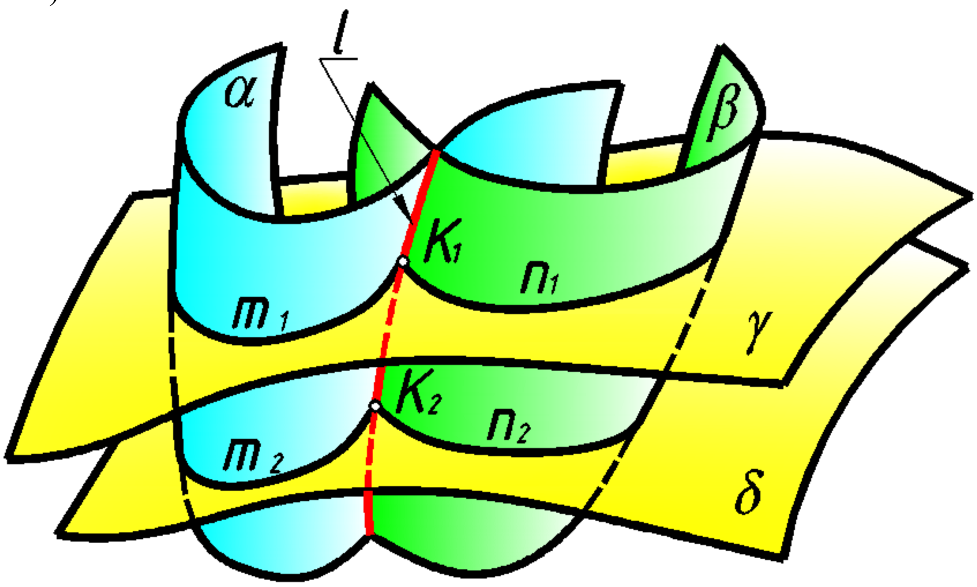


Рис. 191

37.1. Способ вспомогательных проецирующих плоскостей

На рис.192 представлено построение линии пересечения плоскости общего положения с поверхностью конуса вращения. В данном случае плоскость α пересекает коническую поверхность по эллипсу, а основание конуса — по отрезку BC.

Сначала найдём высшую точку A линии пересечения. Высшая точка принадлежит плоскости β, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через ось конической поверхности перпендикулярно плоскости α. Плоскость β пересекает конус по образующей SL, а плоскость α по прямой a. На пересечении этих прямых находится точка A.

Низшими точками являются точки ***B*** и ***C***, которые находятся на горизонтали ***b***, по которой плоскость основания конуса $\boldsymbol{\gamma}$ пересекает плоскость $\boldsymbol{\alpha}$.

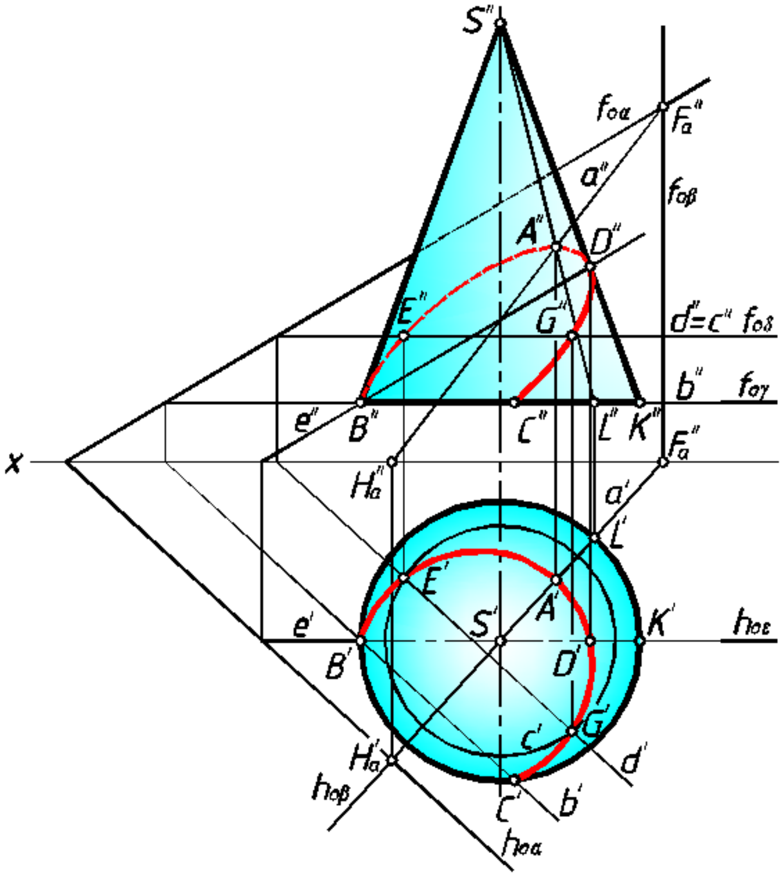


Рис. 192

Точка ***D*** на очерковой образующей конуса — граница видимости фронтальной проекции кривой. Для нахождения этой точки используем проецирующую вспомогательную плоскость $\boldsymbol{\varepsilon}$, которая пересекает конус по образующей ***SK***, а плоскость по фронтали ***e*****.** Точка их пересечения — точка ***D.***

Промежуточные точки линии пересечения легко найти, применяя вспомогательные плоскости перпендикулярные оси конической поверхности. Эти плоскости пересекаются с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ по горизонталям, а с конической поверхностью по окружностям. Например, задав вспомогательную секущую плоскость $\boldsymbol{\delta}$, найдем точки ***E*** и ***G***. Их проекции находятся на пересечении проекций окружности ***c***, полученной от пересечения плоскости $\boldsymbol{\delta}$ с конусом, и горизонтали ***d***, полученной от пересечения плоскости $\boldsymbol{\delta}$ с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$.

На рис.193 представлено построение линии пересечения сферы с центром в точке ***O*** и конуса вращения, ось которого перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций.

К характерным (опорным) точкам линии пересечения откосятся точки ***A***, ***B*** и ***C***. Точки ***A*** и ***B*** являются верхней и нижней точками линии пересечения. Их фронтальные проекции находятся на пересечении фронтальных проекций главных меридианов заданных поверхностей, которые лежат в плоскости $\boldsymbol{\varepsilon}$, проходящей через ось конуса и центр сферы.

Точка ***C*** является границей видимости линии пересечения поверхностей на горизонтальной плоскости проекций. Поскольку коническая поверхность полностью видна на горизонтальной проекции, а у сферы только верхняя часть до ее экватора ***e*****,** точка ***C*** должна лежать на экваторе сферы. Для нахождения проекций точки ***C*** заключим экватор e в плоскость α и построим проекции параллели c, по которой эта плоскость пересечет поверхность конуса. На пересечении проекций экватора e и параллели c получим проекции двух точек C_1 и C_2, в которых линия пересечения изменяет видимость.

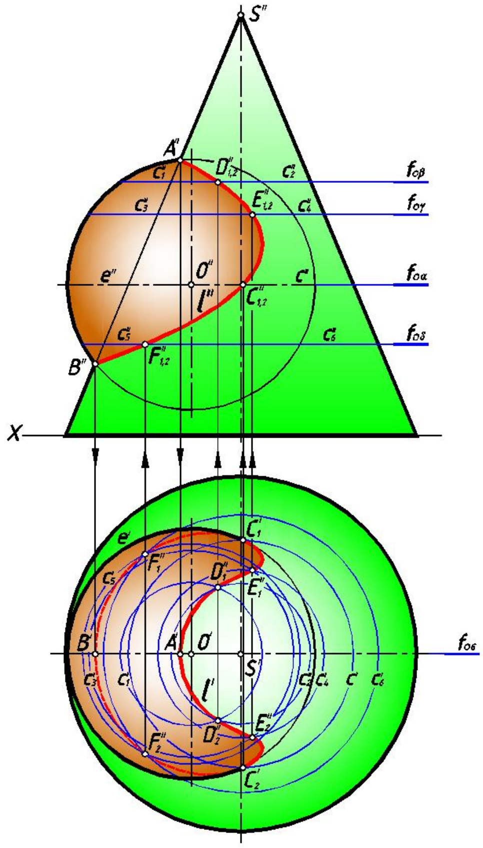


Рис. 193

Промежуточные точки линии пересечения находим, вводя ряд параллельных горизонтальных секущих плоскостей: β, γ, δ. Каждая из этих плоскостей пересекает заданные поверхности по окружностям (параллелям) c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, на пересечении которых находятся искомые точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2.

В заключение заметим:

1) данная задача может быть легко решена способом вспомогательных концентрических сфер (см. §33),

2) фронтальная проекция построенной линии пересечения является параболой (см.§37).

37.2. Способ вспомогательных плоскостей общего положения

При построении линии пересечения линейчатых поверхностей рационально использовать вспомогательные секущие плоскости общего положения, которые пересекают заданные поверхности по прямым линиям — образующим этих поверхностей.

Пересечение конической и цилиндрической поверхностей общего вида показано на рис.194.

Для того, чтобы вспомогательная плоскость пересекала цилиндрическую поверхность по прямой (образующей), она должна быть параллельна образующим этой цилиндрической поверхности. Для того, чтобы плоскость пересекала коническую поверхность по прямой (образующей), она должна проходить через вершину конической поверхности.

Следовательно, если мы проведём прямую a через вершину S конической поверхности параллельно образующим g цилиндрической поверхности, то все плоскости, содержащие эту прямую, будут пересекать обе поверхности по прямым (образующим).

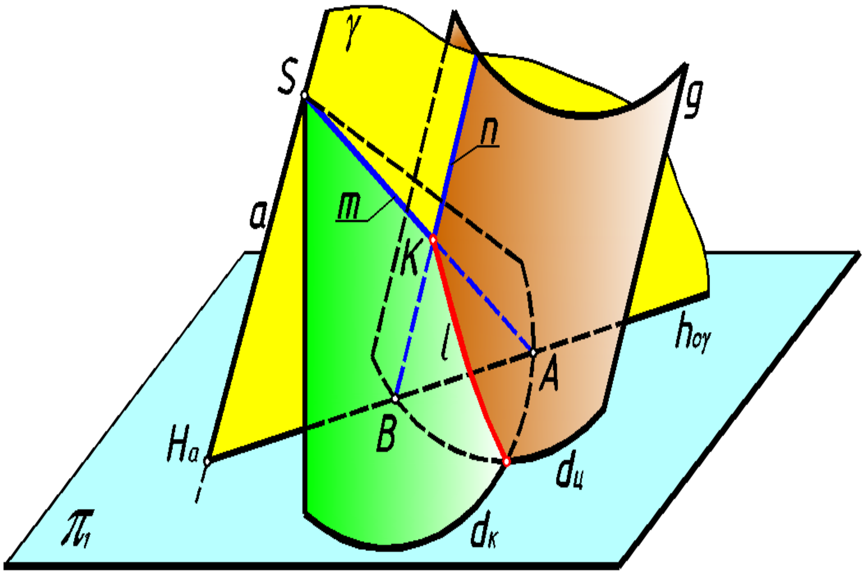


Рис. 194

Для построения образующих через точку ***Ha*** пересечения прямой ***a*** с плоскостью π_1, на которой находятся направляющие $d_к$ и $d_ц$ заданных поверхностей, проводим след ***h0γ*** вспомогательной плоскости ***γ***. Через точки ***A*** и ***B*** пересечения следа с направляющими поверхностей проводим образующие ***m*** и ***n*** соответствующих поверхностей. Точка ***K*** пересечения образующих является общей точкой поверхностей, т.е. принадлежит линии их пересечения ***l***.

Решение этой задачи в проекциях представлено на рис.195.

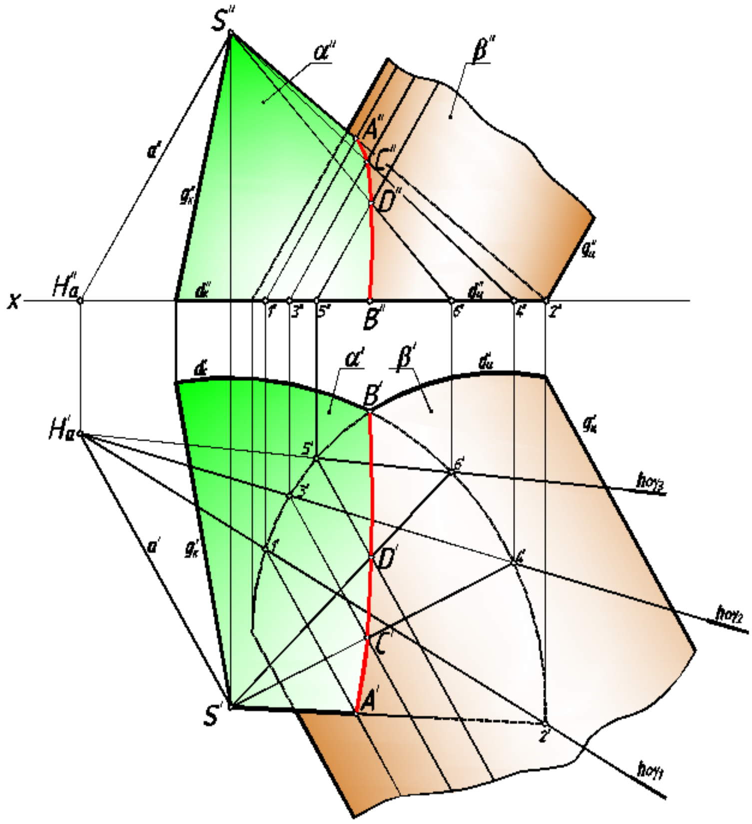


Рис. 195

Рассмотрим построение точек, принадлежащей линии пересечения заданных поверхностей.

При нахождении образующих, по которым вспомогательная плоскость пересекает заданные цилиндрическую и коническую поверхности, необходимо определить пересечение вспомогательной плоскости с направляющими заданных поверхностей.

Вспомогательную плоскость задаём прямой $\boldsymbol{a}$ и горизонтальным следом $\boldsymbol{h_{o\gamma 1}}$, который пересекает направляющую цилиндрическую поверхность в точке $\boldsymbol{1}$, а направляющую конической поверхности точке $\boldsymbol{2}$. Через эти точки пройдут образующие, по которым вспомогательная плоскость пересекает заданные поверхности. На пересечении этих образующих получаем точку $\boldsymbol{A}$, принадлежащую линии пересечения заданных поверхностей.

Для построения следующей точки проводим след $\boldsymbol{h_{o\gamma 2}}$ второй вспомогательной плоскости. Через точки $\boldsymbol{3}$ и $\boldsymbol{4}$ пересечения этого следа с направляющими цилиндрической и конической поверхностей проводим образующие этих поверхностей и на их пересечении получаем точку $\boldsymbol{C}$, принадлежащую линии пересечения заданных поверхностей.

Повторяем описанные действия для получения требуемого количества точек.

На рис.196 представлено нахождение одной из точек линии пересечения двух конических поверхностей.

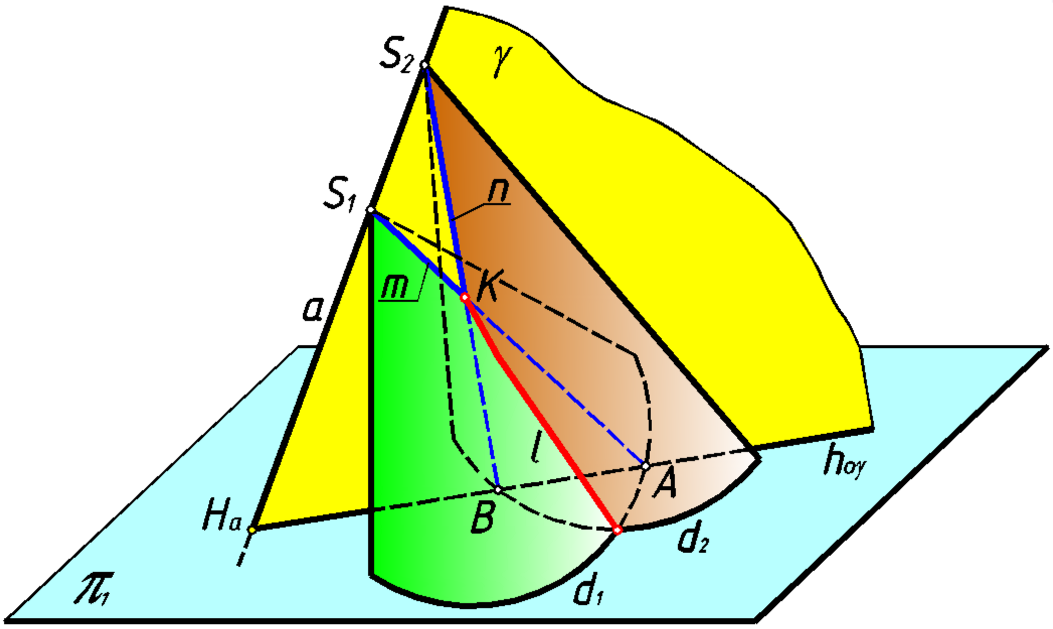


Рис. 196

Для того, чтобы вспомогательная плоскость пересекала коническую поверхность по прямой (образующей), она должна проходить через вершину этой поверхности. Следовательно, если мы проведём прямую $\boldsymbol{a}$ через вершины $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ заданных конических поверхностей, то любая плоскость, проходящая через эту прямую, пересечет обе поверхности по прямым линиям (образующим этих поверхностей).

Для построения образующих через точку $\boldsymbol{H_a}$ пересечения прямой $\boldsymbol{a}$ с плоскостью $\boldsymbol{\pi_1}$, на которой находятся направляющие $\boldsymbol{d_1}$ и $\boldsymbol{d_2}$ заданных поверхностей, проводим след $\boldsymbol{h_{o\gamma}}$ вспомогательной плоскости $\boldsymbol{\gamma}$. Через точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ пересечения следа вспомогательной плоскости с направляющими поверхностей проводим образующие $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$

соответствующих поверхностей. Точка K пересечения образующих является общей точкой поверхностей, т.е. принадлежит линии их пересечения l.

Рассмотрим построение одной из точек линии пересечения двух цилиндрических поверхностей α и β с образующими g_1 и g_2, направляющие которых d_1 и d_2 расположены на плоскости проекций π_1 (рис.197).

Для того, чтобы плоскость пересекала цилиндрическую поверхность по прямой линии, она должна быть параллельна образующим этой поверхности. Следовательно, если задать плоскость γ двумя пересекающимися прямыми a и b, где $a \| g_1$ и $b \| g_2$, то такая плоскость пересечет обе цилиндрические поверхности по прямым линиям (образующим этих поверхностей).

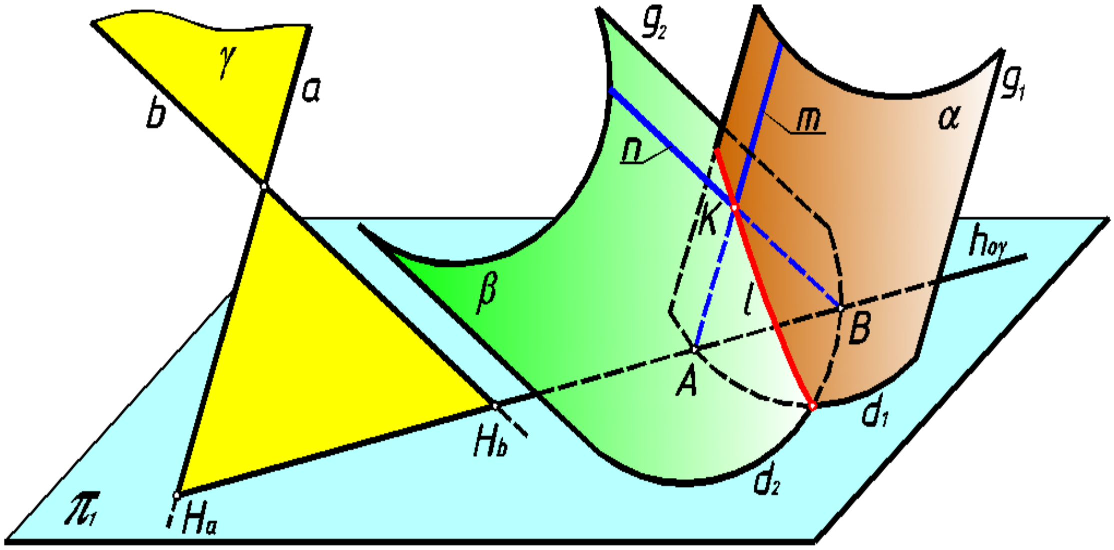


Рис. 197

Горизонтальный след $h_{o\gamma}$ плоскости γ, проходящий через горизонтальные следы Ha и Hb прямых a и b, пересекает направляющие заданных поверхностей в точках A и B. Через эти точки проходят образующие m и n, по которым плоскость γ пересекает цилиндрические поверхности. Точка K, в которой пересекаются прямые m и n, принадлежит обеим цилиндрическим поверхностям, а значит, и линии их пересечения l.

Проводя следы вспомогательных плоскостей параллельно следу $h_{o\gamma}$ можно найти необходимое количество точек для построения линии l.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *В чем суть способа вспомогательных секущих поверхностей, применяемого при построении линии пересечения поверхностей?*
- *В каких случаях в качестве вспомогательных поверхностей используют плоскости общего положения?*
- *Как следует выбирать вспомогательные плоскости при построении линии пересечения конической и цилиндрической, двух конических, двух цилиндрических поверхностей общего вида?*

37.3. Способ концентрических секущих сфер

В некоторых случаях при построении линии пересечения поверхностей целесообразно в качестве вспомогательных поверхностей использовать не плоскости, а сферы. Их применение основано на свойстве соосных поверхностей вращения пересекаться по окружностям. ***Соосными*** называются поверхности вращения, имеющие общую ось. Отсюда следует, что сфера с центром на оси поверхности вращения пересекает эту поверхность по окружностям.

Различают два способа: способ *концентрических* секущих сфер и способ *эксцентрических* секущих сфер.

Концентрическими секущими сферами называются сферы, имеющие общий центр.

Способ применяют при одновременном соблюдении трех условий:

1. Обе пересекающиеся поверхности — поверхности вращения.
2. Оси поверхностей пересекаются.
3. Оси параллельны одной из плоскостей проекций.

На рис.198 демонстрируется применение способа концентрических сфер при построении линии пересечения поверхности тора и конической поверхности вращения. Все изложенные выше условия применения способа соблюдаются.

За центр вспомогательных сфер принимаем точку ***O***, в которой пересекаются оси поверхностей.

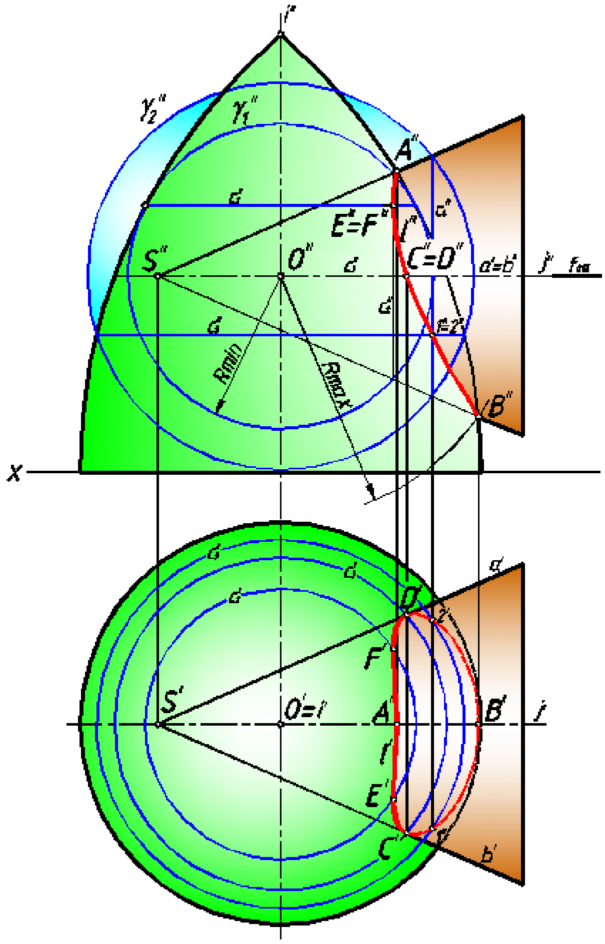


Рис. 198

При решении данной задачи необходимо определить величины радиусов сфер, введение которых даёт возможность получения точек, принадлежащих линии пересечения заданных поверхностей. Максимальный радиус сферы равен наибольшему расстоянию от выбранного центра вспомогательных сфер (точки пересечения осей заданных поверхностей) до точек A и B (точек пересечения очерков заданных поверхностей). Минимальный радиус вспомогательной сферы равен радиусу наибольшей из двух сфер, вписанных в заданные поверхности. В нашем примере это радиус сферы, вписанной в тор.

Точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей находим следующим образом. Минимальная сфера γ_1 касается поверхности тора по окружности c_1 и пересекает поверхность конуса по окружности c_2. Обе окружности на фронтальную плоскость проецируются в виде отрезков прямых c''_1 и c''_2. Так как окружности находятся на общей сфере, они пересекаются в точках E и F. Горизонтальные проекции этих точек находим на горизонтальной проекции окружности c_1. Точки E и F — ближайшие к оси тора.

Следующая вспомогательная сфера γ_2 пересекает заданные поверхности по окружностям c''_3 и c''_4, которые проецируются на фронтальную плоскость отрезками. На пересечении этих окружностей находим точки 1 и 2. Горизонтальные проекции этих точек находим на горизонтальной проекции окружности c_2.

Продолжая построения по изложенной схеме, находим необходимое количество точек, которые затем соединяем плавной кривой линией l.

Характерные точки C и D, определяющие границы видимости кривой на горизонтальной плоскости проекций, находим с помощью вспомогательной секущей плоскости α, которая пересекает тор по окружности c_5, а конус по образующим a и b.

37.4. Способ эксцентрических секущих сфер

Эксцентрическими называются сферы с несовпадающими центрами.

Способ применяют при одновременном соблюдении трех условий:

1. Одна из пересекающихся поверхностей — поверхность вращения, а вторая-поверхность с круговыми сечениями (трубчатая или циклическая).
2. Поверхности имеют общую плоскость симметрии.
3. Плоскость симметрии параллельна одной из плоскостей проекций.

Одним из оснований применения данного способа является то, что одна и та же окружность может принадлежать бесчисленному множеству сфер различного радиуса, центры которых находятся на перпендикуляре к плоскости окружности, проведенном через центр этой окружности.

На рис.199 представлено построение линии пересечения конической и торовой поверхности (кольца). Тор в данном примере используется как трубчатая поверхность, т.е. поверхность с круговыми сечениями в меридиональных плоскостях.

К опорным точкам линии пересечения относятся высшая и низшая точки A и B, определяемые пересечением фронтальных очерков поверхностей, и точки D на границе видимости горизонтальной проекции кривой пересечения поверхностей, которую можно найти только после построения всей кривой.

Для нахождения произвольной точки, принадлежащей линии пересечения указанных поверхностей, на поверхности тора выбираем окружность c_1, принадлежащую меридиональной плоскости μ_1. На фронтальную плоскость проекций окружность c_1 проецируется в отрезок $1''2''$. Все центры сфер, которые можно провести через эту окружность, расположены на прямой n_1, перпендикулярной плоскости этой окружности и проходящей через её центр C_1. Точку O_1 пересечения этой прямой с осью конуса i выбираем за центр вспомогательной сферы и проводим эту сферу γ_1 через окружность c_1 на торе. Выбранная сфера пересекает конус по окружности c_2, которая проецируется на плоскость проекций в отрезок $3''4''$. Точки пересечения двух окружностей задают точку K, принадлежащую линии пересечения поверхностей. Горизонтальные проекции точек находим на параллелях c_7 торовой поверхности.

Остальные точки кривой находим в той же последовательности.

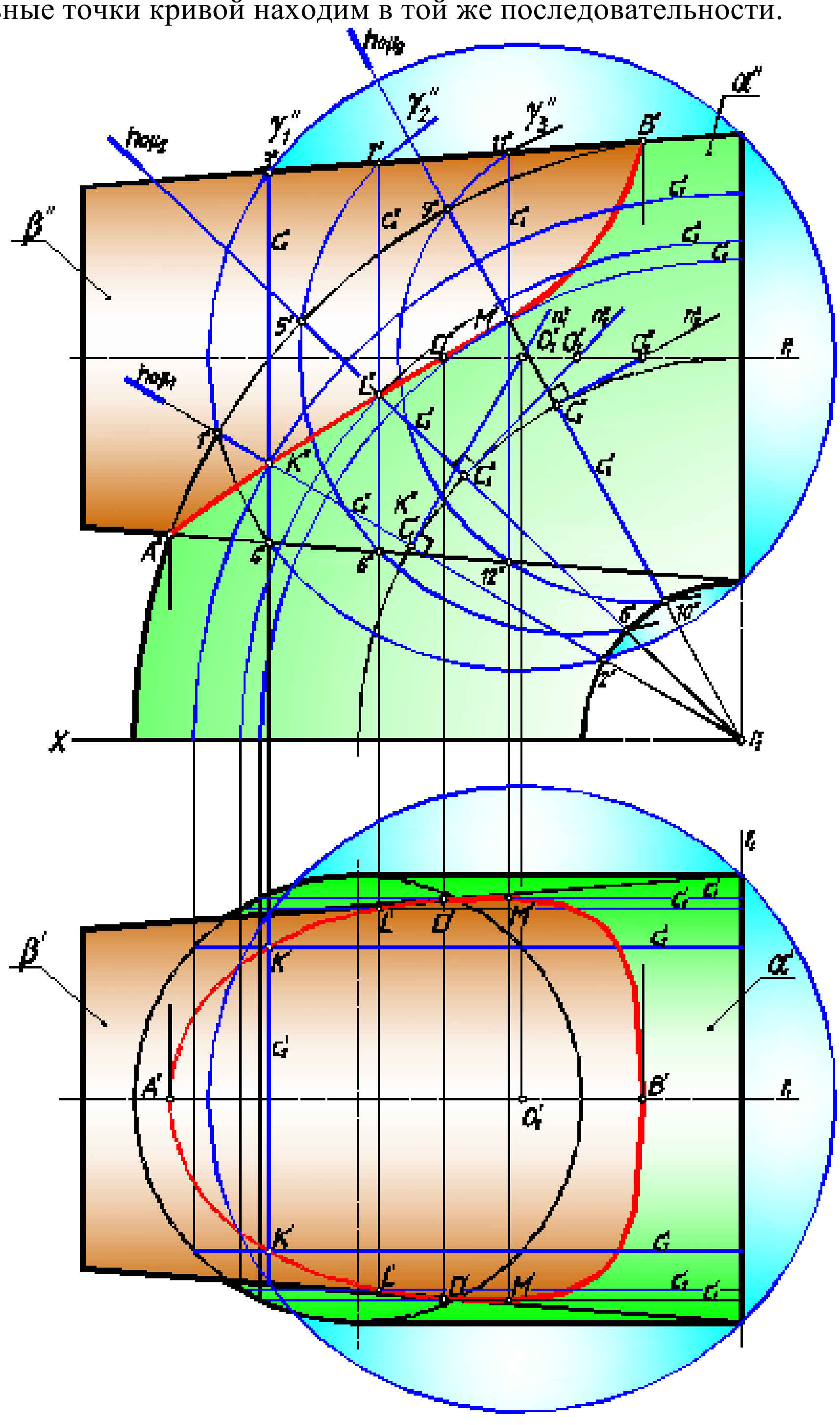


Рис.199

Вопросы для самопроверки

- В каком случае используют концентрические секущие сферы?
- Где находятся центры вспомогательных секущих сфер?

- *Чему равен радиус наименьшей и наибольшей из применяемых сфер?*
- *Опишите последовательность действий для построения одной из точек линии пересечения в способе концентрических секущих сфер.*
- *В каком случае используют эксцентрические секущие сферы?*
- *Опишите последовательность действий для построения одной из точек линии пересечения в способе эксцентрических секущих сфер.*

§38. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В общем случае кривые поверхности пересекаются по сложным пространственным кривым. В частных случаях эта кривая может распадаться на простые линии.

На рис.200 показано, что две конические поверхности с общей вершиной пересекаются по прямым линиям, образующим этих поверхностей. На рис.201 показаны два пересекающихся цилиндра с параллельными образующими. Их линии пересечения - общие образующие.

Две соосных поверхности вращения (рис.202) пересекаются по общим параллелям (окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения). Если такие поверхности касаются друг друга (рис.203), то линия их касания – окружность (общая параллель).

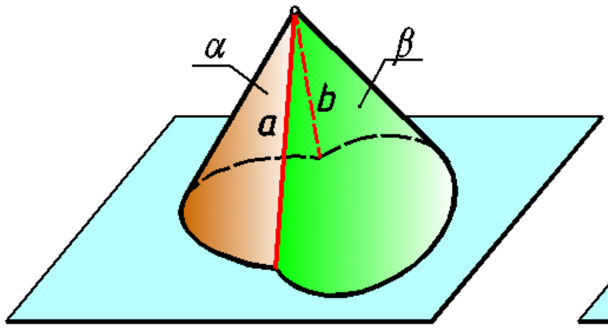


Рис.200

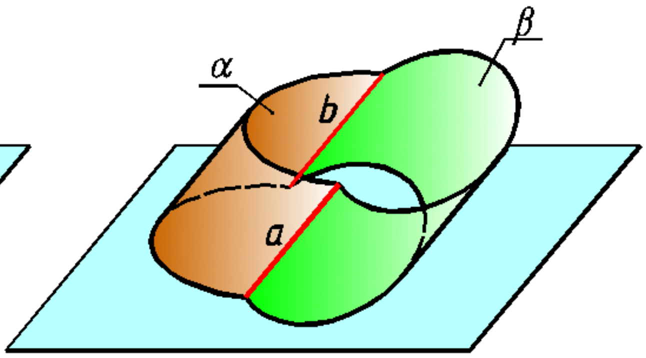


Рис.201

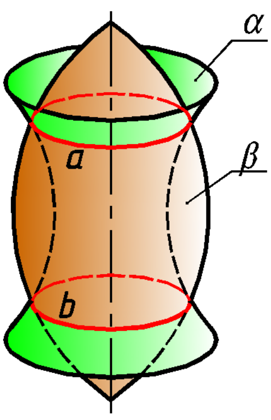


Рис.202

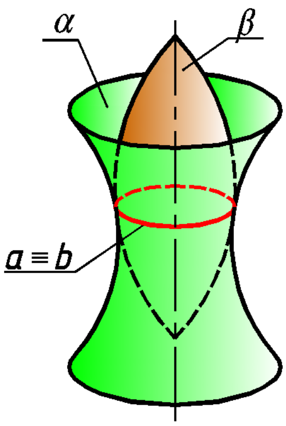


Рис.203

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *В каком случае конические поверхности пересекаются по общим образующим?*
- *В каком случае цилиндрические поверхности пересекаются по общим образующим?*
- *По каким линиям пересекаются соосные поверхности вращения?*

38.1. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

Основная теорема алгебры применительно к пересечению поверхностей формулируется так: ***две алгебраические поверхности порядков n и m пересекаются по пространственной кривой порядка nm.***

Следствие из этой теоремы: ***две поверхности второго порядка в общем случае пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка.***

В частных случаях эта кривая может распадаться на линии меньшего порядка. Сумма порядков линий, на которые распадается линия пересечения, должно равняться четырем, т.е. варианты распадения следующие:

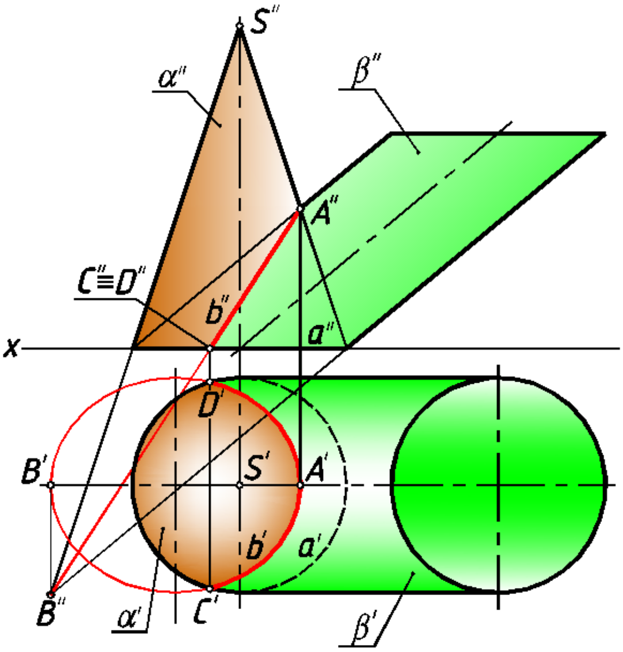
а) 4=1+3; одна прямая и кривая третьего порядка;
б) 4=1+1+2; две прямые и кривая второго порядка;
в) 4=1+1+1+1; четыре прямые;
г) 4=2+2; две кривые второго порядка.

Ниже представлены без доказательства несколько теорем относящихся к случаям распадения кривой четвертого порядка на линии меньшего порядка.

<u>Теорема 1.</u> Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и по второй кривой, которая так же является плоской. Этот случай представлен на рис.204.

Поверхности конуса вращения ***α*** и эллиптического цилиндра ***β*** пересекаются по окружности ***a*** основания конуса (плоская кривая). Следовательно, они пересекаются и по второй плоской кривой ***α***, проходящей через точки ***A*** и ***B***, являющиеся пересечением очерковых образующих заданных поверхностей. В данном примере кривая ***b*** — эллипс.

Если одной из поверхностей является сфера ***α***, то, очевидно, второй плоской линией пересечения ***b*** будет окружность (рис.205). Эту теорему часто используют для нахождения круговых сечений на эллиптических поверхностях.



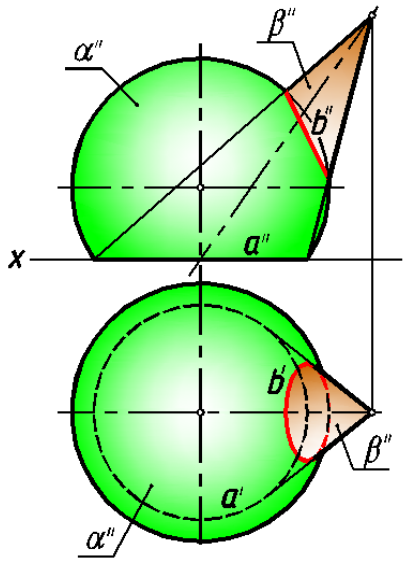


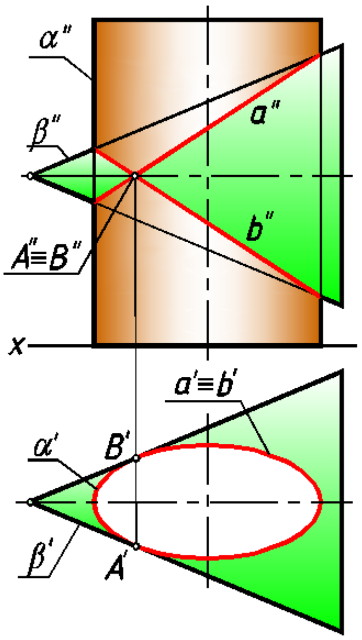
Рис. 204

Рис. 205

Теорема 2 (о двойном прикосновении). Если две поверхности второго порядка ***α*** и ***β*** имеют две точки прикосновения ***A*** и ***B***, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка ***a*** и ***b***, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки прикосновения (касания) ***A*** и ***B***.

На рис.206 построена линия пересечения поверхности эллиптического цилиндра и конической поверхности вращения. Точки прикосновения — ***A*** и ***B***, линии пересечения ***a*** и ***b*** — эллипсы. Плоскости кривых ***a*** и ***b*** пересекаются по прямой ***AB***.

На рис.207 эллиптический цилиндр касается сферы в двух точках ***A*** и ***B***. Линии пересечения ***a*** и ***b*** — окружности, поэтому эту теорему часто используют для нахождения круговых сечений эллиптических поверхностей.



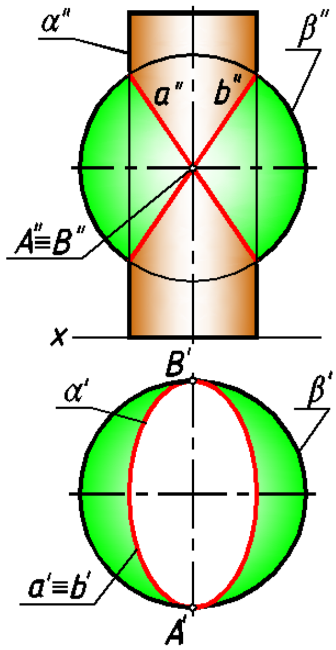


Рис. 206

Рис. 207

Теорема 3 (Теорема Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую соединяющую точки пересечения линий касания.

В соответствии с этой теоремой линии a и b пересечения двух конических поверхностей α и β, описанных около сферы γ, будут плоскими кривыми — эллипсами, фронтальные проекции которых прямые линии (рис.208).

Линии касания c_1 и c_2 пересекаются в точках A и B, через которые проходят линии пересечения a и b и прямая, по которой пересекаются плоскости кривых.

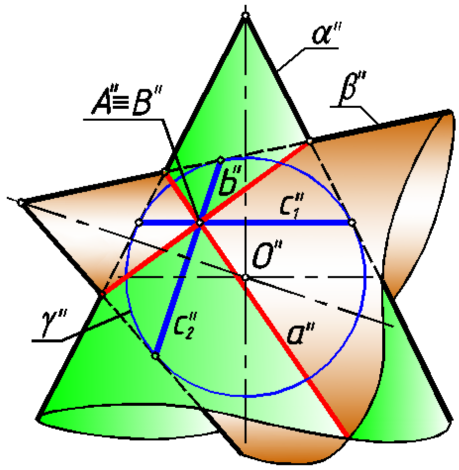


Рис. 208

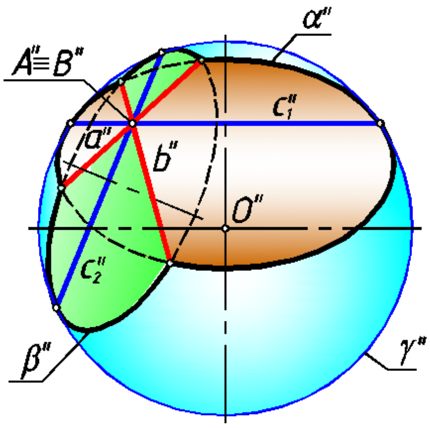


Рис. 209

На рис.209 два сжатых эллипсоида вращения α и β вписаны в сферу γ. В соответствии с теоремой Монжа, линии a и b пересечения этих поверхностей — эллипсы (две плоские кривые линии).

Теорема 4. Если две поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде кривой второго порядка.

На рис.210 и рис.211 показано пересечение цилиндрических поверхностей с пересекающимися осями, параллельными фронтальной плоскости проекций.

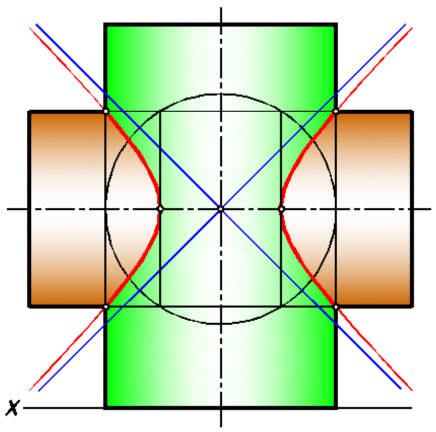


Рис. 210

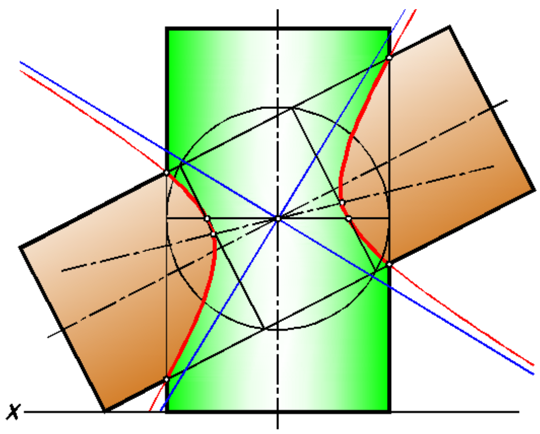


Рис. 211

Линия пересечения в данных примерах на плоскость π_2 проецируется в виде гиперболы. Действительной осью гиперболы является ось цилиндрической поверхности меньшего диаметра, а мнимой осью — ось другой цилиндрической поверхности.

Асимптоты пересекаются под углом 90^0.

Вершина гиперболы получена введением вспомогательной сферы, вписанной в цилиндрическую поверхность большего диаметра

На рис.211 оси цилиндрических поверхностей пересекаются не под прямым углом.

Положение асимптот и вершины гиперболы можно определить дополнительными построениями, зная точки, принадлежащие гиперболе.

На рис.212 представлено пересечение цилиндрической и конической поверхностей, а на рис.213 — двух конических поверхностей. В обоих случаях линия пересечения проецируется в виде гиперболы.

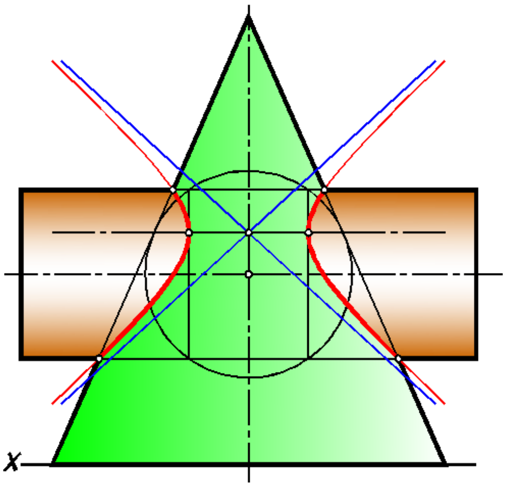


Рис. 212

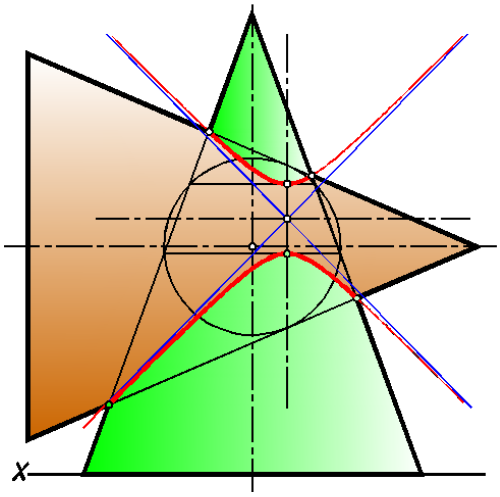


Рис. 213

Линия пересечения цилиндрической поверхности со сферой (рис.214) проецируется в виде параболы. Ось параболы проходит через центр сферической поверхности и перпендикулярна оси цилиндрической поверхности. Расстояние от оси цилиндрической поверхности до центра сферы определяет величину параметра $\boldsymbol{p}$, дающее возможность определить положение фокуса $\boldsymbol{F}$ и директрисы.

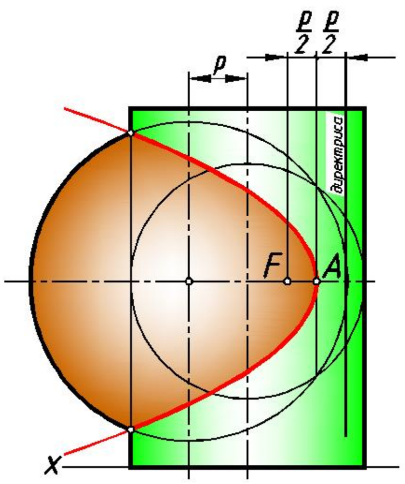


Рис. 214

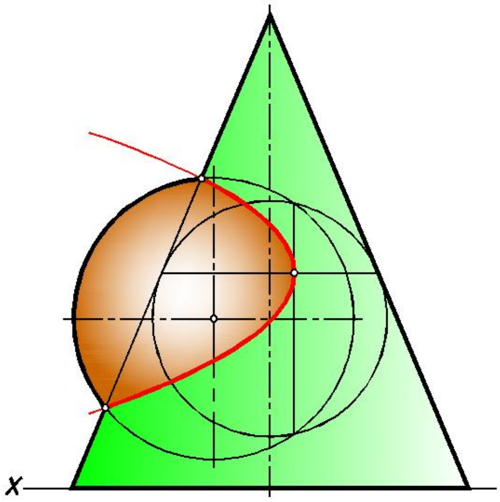


Рис. 215

Линия пересечения конической поверхности со сферой (рис.215) также проецируется в виде параболы.

Вопросы для самопроверки

- *В каком случае конические поверхности пересекаются по общим образующим?*
- *В каком случае цилиндрические поверхности пересекаются по общим образующим?*
- *По каким линиям пересекаются соосные поверхности вращения?*
- *По каким линиям пересекаются две поверхности второго порядка с общим основанием?*
- *Сформулируйте теорему о двойном прикосновении.*
- *Сформулируйте теорему Монжа.*
- *Как проецируется на общую плоскость симметрии линия пересечения двух поверхностей второго порядка?*

§39. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

Линия с поверхностью пересекаются в одной или нескольких точках. Точки пересечения — это точки, общие для поверхности и для линии.

Рассмотрим два случая: когда-либо линия либо поверхность находятся в проецирующем положении и когда обе фигуры — непроецирующие.

39.1. Случай, когда одна из геометрических фигур — проецирующая

При проецирующем положении либо поверхности, либо линии решение задачи существенно упрощается.

На рис.216 показано пересечение поверхности горизонтально проецирующего цилиндра α с пространственной кривой a. В силу того, что горизонтальной проекцией цилиндра является его след $h_{0\alpha}$, горизонтальные проекции всех точек этой поверхности находятся на этом следе, в том числе и проекции точек пересечения. Поскольку точки пересечения принадлежат кривой a, горизонтальные проекции этих точек должны принадлежать горизонтальной проекции этой кривой. Таким образом горизонтальные проекции A' и B' искомых точек являются точками пересечения следа $h_{0\alpha}$ поверхности с горизонтальной проекцией a' кривой. Фронтальные проекции точек пересечения A'' и B'' находятся на фронтальной проекции a'' кривой.

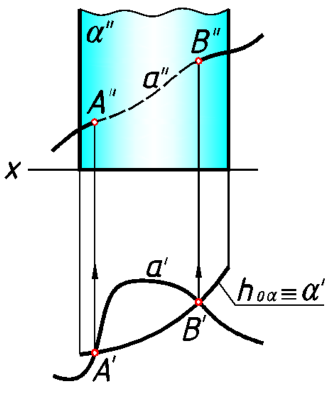


Рис. 216

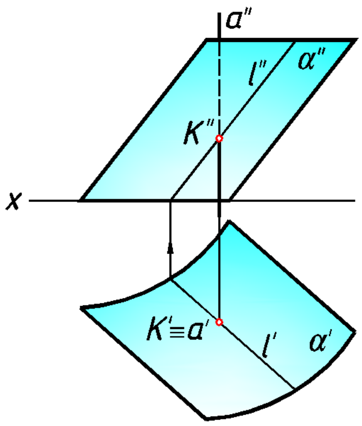


Рис. 217

На рис.217 цилиндрическая поверхность α общего положения пересекается с проецирующей прямой a. Любая точка проецирующей прямой на горизонтальную плоскость проекций проецируется в ту же точку, что и прямая, следовательно, горизонтальная проекция $\boldsymbol{K'}$ точки пересечения известна. Фронтальную проекцию $\boldsymbol{K''}$ этой точки находим из условия принадлежности ее цилиндрической поверхности (на образующей $\boldsymbol{l}$).

Аналогичным образом находят точки пересечения прямой линии с другими поверхностями.

На рис.218 проецирующая прямая $\boldsymbol{c}$ пересекает плоскость общего положения, заданную параллельными прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Горизонтальная проекция точки пересечения $\boldsymbol{K'}$ известна. Она совпадает с горизонтальной проекцией $\boldsymbol{c'}$ прямой. Фронтальную проекцию $\boldsymbol{K''}$ точки пересечения находим из условия принадлежности ее плоскости, проведя через эту точку в плоскости прямую $\boldsymbol{l}$.

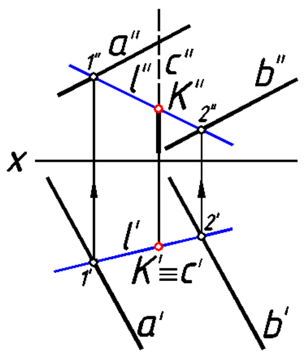


Рис. 218

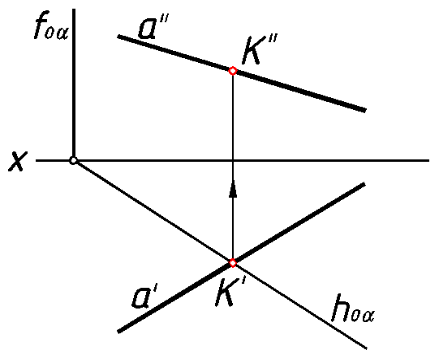


Рис. 219

На рис.219 горизонтально проецирующая плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ пересекается с прямой общего положения $\boldsymbol{a}$. Горизонтальную проекцию $\boldsymbol{K'}$ точки пересечения находим на пересечении горизонтального следа $\boldsymbol{h_{o\alpha}}$ плоскости и горизонтальной проекции $\boldsymbol{a'}$ прямой. Фронтальная проекция $\boldsymbol{K''}$ точки пересечения находится на фронтальной проекции $\boldsymbol{a''}$ прямой.

При пересечении фронтально проецирующей прямой $\boldsymbol{a}$ с конической (рис.220) и сферической (рис.221) поверхностями, на фронтальную плоскость проекций прямая проецируется в точку $\boldsymbol{a''}$, с которой совпадают фронтальные проекции $\boldsymbol{K''_1}$ и $\boldsymbol{K''_2}$ точек пересечения прямой с поверхностью.

Горизонтальные проекции точек пересечения находим исходя из принадлежности этих точек поверхности (на конусе (рис.220) для этого можно воспользоваться либо образующими поверхности, либо параллелью $\boldsymbol{c}$; на сфере (рис.221) — либо параллелью $\boldsymbol{c_1}$, либо параллелью $\boldsymbol{c_2}$).

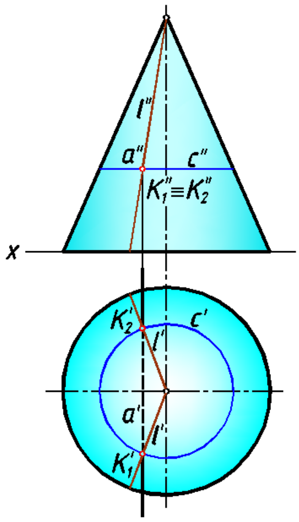


Рис. 220

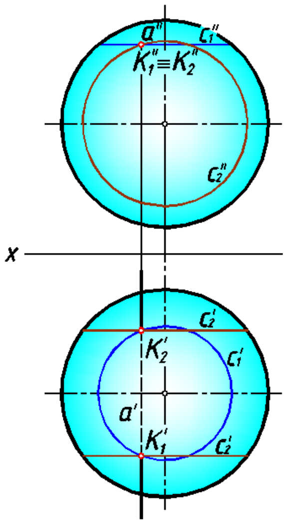


Рис. 221

39.2. Случай, когда обе геометрические фигуры — общего положения

При пересечении линии ***a*** с поверхностью ***α***, когда ни линия, ни поверхность не занимают проецирующего положения относительно какой-либо плоскости проекций, применяют следующий алгоритм решения (рис.222):

1. Линию ***a*** заключают во вспомогательную поверхность ***γ***.
2. Строят линию ***l*** пересечения вспомогательной поверхности ***γ*** с поверхностью ***α***.
3. На пересечении построенной линии ***l*** с прямой ***a*** находят искомую точку ***К***.

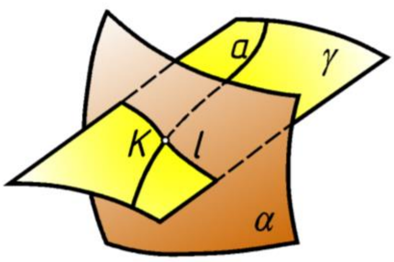


Рис. 222

Вспомогательную поверхность следует выбирать таким образом, чтобы линия пересечения ее с заданной поверхностью проецировалась в виде простой линии. В частности, если линия ***a*** — прямая, то в качестве вспомогательной поверхности ***γ*** рационально использовать плоскость.

На рис.223 показано нахождение точек пересечения горизонтальной прямой ***a*** с поверхностью конуса вращения, а на рис.224 — со сферой. В обоих случаях для построения использованы вспомогательные горизонтальные плоскости, т.к. они пересекают заданные поверхности по окружностям, проекции которых также окружности. Если в качестве вспомогательных секущих плоскостей взять горизонтально проецирующие плоскости, то в примере на рис.223 такая плоскость пересечет конус по гиперболе, а в примере на рис.224, хотя линия пересечения будет окружностью, но ее фронтальной проекцией будет эллипс. И в том и в другом случае придется строить лекальную кривую, что не рационально.

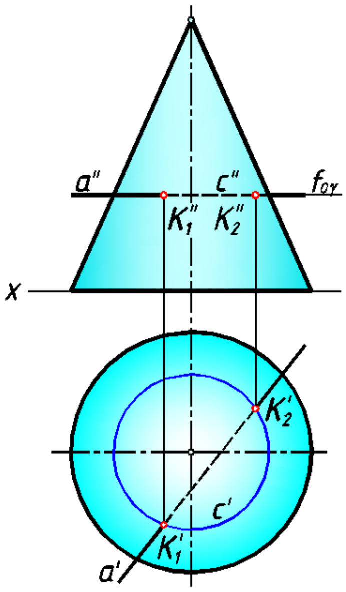


Рис. 223

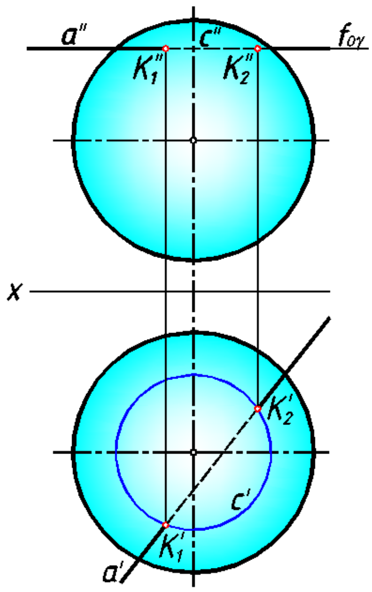


Рис. 224

На рис.225 дан пример пересечения прямой общего положения ***a*** с поверхностью тора.

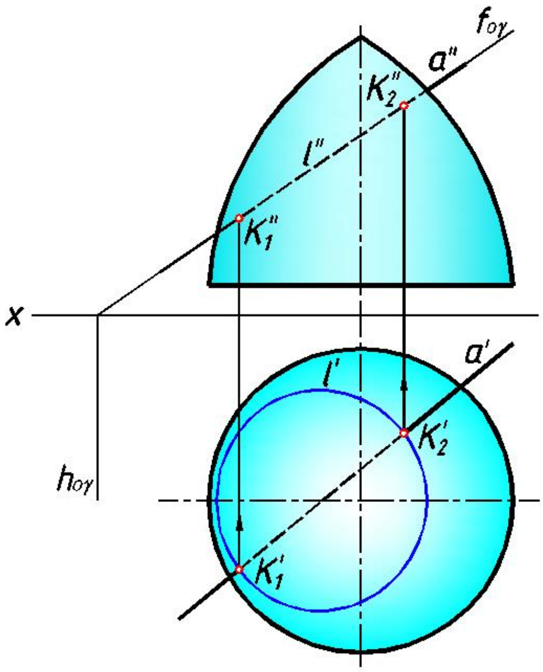


Рис. 225

В этом случае нельзя заключить прямую во вспомогательную плоскость, линия пересечения с которой будет проецироваться в виде простой линии. Чтобы было легче находить кривую пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью тора, заключим прямую в проецирующую плоскость. На пересечении полученной кривой ***l*** с заданной прямой ***a*** находим искомые точки K_1 и K_2 пересечения с поверхностью тора. Построение линии пересечения тора проецирующей плоскостью рассматривалось ранее (рис.189), поэтому здесь не приводится.

При пересечении прямой с плоскостью общего положения вспомогательную плоскость следует всегда задавать в проецирующем положении относительно какой-либо плоскости проекций. Тогда легко решается задача на пересечение плоскостей. На рис.226 прямая ***m*** заключена во фронтально проецирующую плоскость *γ*, которая пересекает заданную плоскость по прямой ***l***. На пересечении прямых ***m*** и ***l*** находится искомая точка ***K*** пересечения прямой и плоскости.

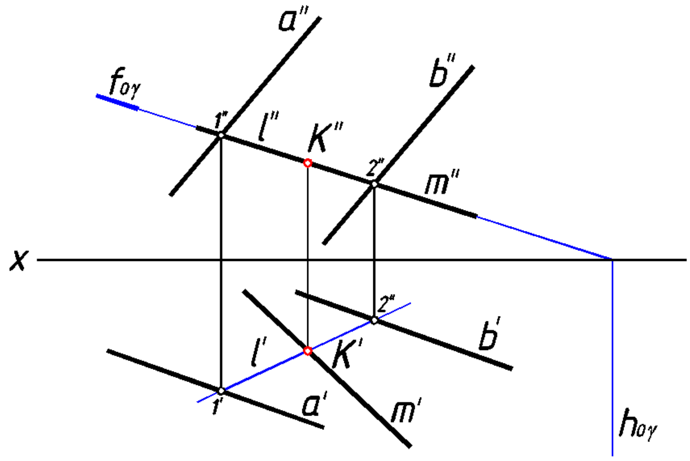


Рис. 226

39.3. Применение вспомогательных плоскостей общего положения

При решении некоторых задач на нахождение точек пересечения прямой с поверхностью более рациональное решение дает применение не проецирующих вспомогательных плоскостей, а плоскостей общего положения. Покажем это на двух примерах.

На рис.227 прямая ***a*** пересекается с поверхностью наклонного кругового цилиндра.

В данном случае применение проецирующей вспомогательной плоскости не рационально, т.к. такая плоскость пересечет цилиндрическую поверхность по эллипсу. Более простое решение получается, если заданную прямую заключить в плоскость ***γ*** общего положения, параллельную образующим цилиндра. Такая плоскость пересечет цилиндр по прямым линиям (образующим).

Чтобы задать такую плоскость, достаточно пересечь заданную прямую ***a*** прямой ***b***, параллельной образующим цилиндра.

Для нахождения линий пересечения следует найти точки ***2*** и ***4***, в которых прямые ***a*** и ***b*** пересекают плоскость основания цилиндра ***α***. Прямая ***m***, проходящая через точки ***2*** и ***4***, является линией пересечения вспомогательной плоскости ***γ*** с плоскостью ***α***. Через точки ***3*** и ***4*** пересечения прямой ***m*** с основанием цилиндра проходят образующие l_1 и l_2, по которым вспомогательная плоскость ***γ*** пересекает поверхность цилиндра. В пересечении образующих l_1 и l_2 с прямой ***a*** находятся искомые точки K_1 и K_2, в которых прямая ***a*** пересекает поверхность цилиндра.

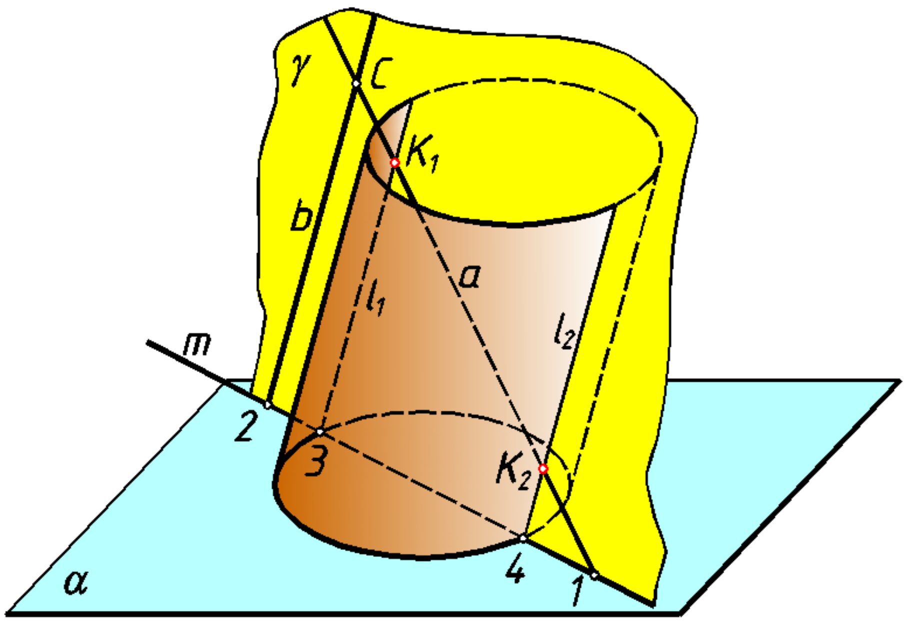


Рис. 227

Решение этой задачи на проекционном чертеже представлено на рис.228. Все обозначения на проекционном чертеже соответствуют обозначениям на рис.227.

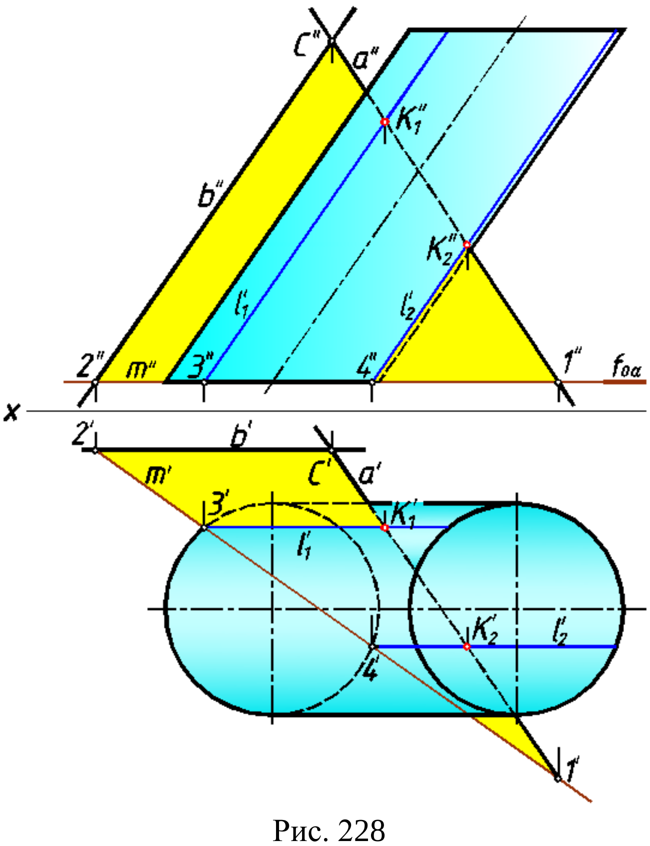


Рис. 228

На рис.229 представлена схема решения задачи по определению точек пересечения прямой ***a*** с поверхностью конуса.

В данном случае прямую ***a*** следует заключить во вспомогательную плоскость ***γ***, проходящую через вершину конуса ***S***, т.к. такая плоскость пересекает коническую поверхность по образующим l_1 и l_2. Там, где эти образующие пересекают прямую a находятся точки K_1 и K_2, в которых прямая a пересекает поверхность конуса.

Плоскость γ на чертеже уже задана прямой a и точкой S. Для построения прямой m, по которой плоскость γ пересекает плоскость α основания конуса, через вершину конуса проведем прямую b, пересекающую прямую a, и найдем точки 1 и 2, в которых прямые a и b пересекают плоскость основания конуса α. Прямая m, проведенная через точки 1 и 2, пересечет основание конуса в точках 3 и 4, через которые проходят образующие l_1 и l_2.

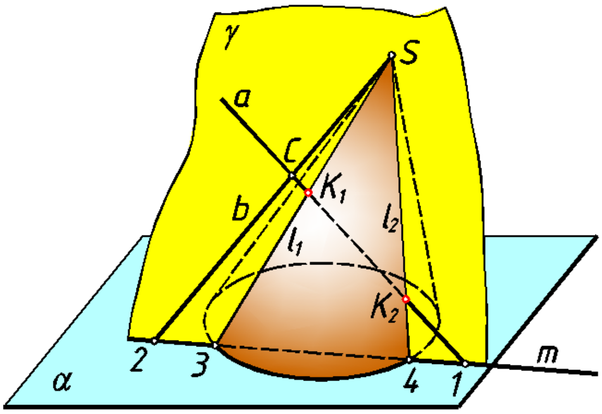


Рис. 229

Решение этой задачи на проекционном чертеже представлено на рис.230. Все обозначения на проекционном чертеже соответствуют обозначениям на рис.229.

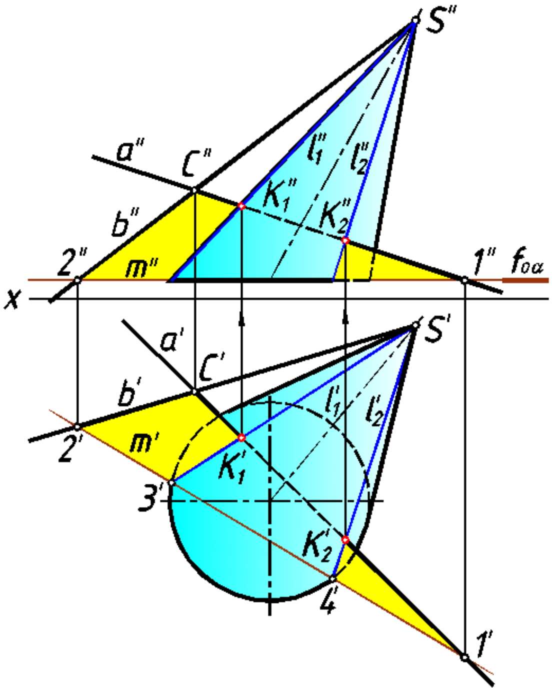


Рис. 230

39.4. Применение способа замены плоскостей при нахождении точек пересечения прямой с поверхностью

Применение способа преобразования чертежа при построении точек пересечения прямой линии с поверхностью сферы приведено на рис.231.

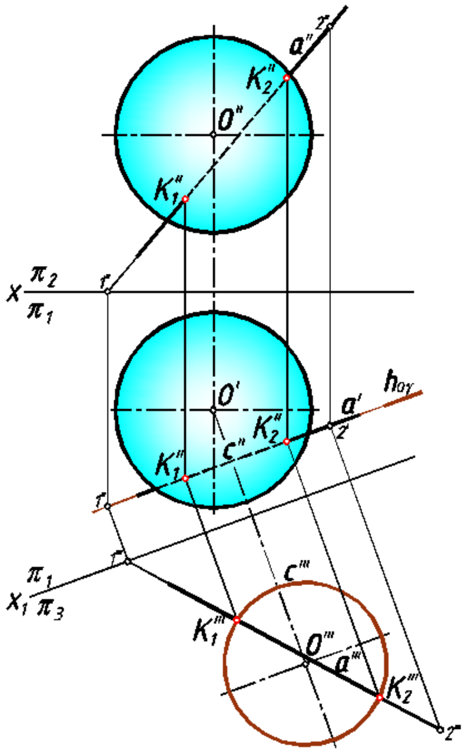


Рис.231

Так как любая плоскость пересекает поверхность сферы по окружности, заключаем прямую $\boldsymbol{a}$ в проецирующую плоскость γ. На рис.231 это — горизонтально проецирующая плоскость. Лежащая в ней окружность сечения сферы $\boldsymbol{c}$ на фронтальную плоскость проекций проецируется в виде эллипса. Чтобы избежать построения лекальной кривой, определение искомых точек производится на дополнительной плоскости проекций π_3, параллельной плоскости γ. На неё окружность $\boldsymbol{c}$ проецируется окружностью c''', а прямая $\boldsymbol{a}$ — линией a'''. Точки пересечения этих линий являются дополнительными проекциями искомых точек пересечения K_1 и K_2.

Проведя линии связи в обратном направлении, находим горизонтальные и фронтальные проекции искомых точек.

Вопросы для самопроверки

- *Что называется точкой пересечения линии с поверхностью?*
- *Почему в случае, когда линия или поверхность занимают проецирующее положение, нахождение точки их пересечения существенно упрощается?*
- *Сформулируйте алгоритм решения задачи по нахождению точек пересечения линии и поверхности в общем случае.*
- *В каких случаях для нахождения точки пересечения прямой с поверхностью удобно использовать вспомогательные проецирующие плоскости?*
- *В каких случаях для нахождения точки пересечения прямой с поверхностью удобно использовать вспомогательные плоскости общего положения?*

§41. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Плоскостью, касательной к поверхности в некоторой точке называют плоскость, которой принадлежат все прямые, касательные к поверхности в данной точке.

Прямой, касательной к поверхности называется прямая, касательная к какой-либо кривой, принадлежащей поверхности.

Нормалью к поверхности в заданной точке называют прямую, перпендикулярную касательной плоскости в данной точке. С помощью нормали определяют кратчайшее расстояние от внешней точки до поверхности.

Поскольку плоскость однозначно задается двумя пересекающимися прямыми, то, для задания касательной плоскости в некоторой точке $\boldsymbol{A}$ поверхности, следует через эту точку провести на поверхности две линии $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и построить к ним касательные $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$ (рис.232).

Если на поверхности через точку можно провести прямую линию, то она будет принадлежать касательной плоскости к поверхности в данной точке.

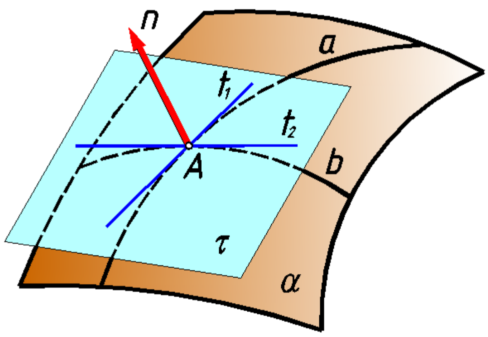


Рис. 232

Взаимное положение касательной плоскости и поверхности может быть трех видов:

1. Касательная плоскость может иметь с поверхностью только одну общую точку. Такая поверхность называется поверхностью с эллиптическими точками (рис.233).
2. Касательная плоскость может касаться поверхности по линии. Такая поверхность называется поверхностью с параболическими точками (рис.234).
3. Касательная плоскость может пересекать поверхность. Такая поверхность называется поверхностью с гиперболическими точками (рис.235).

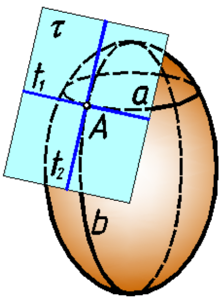


Рис. 233

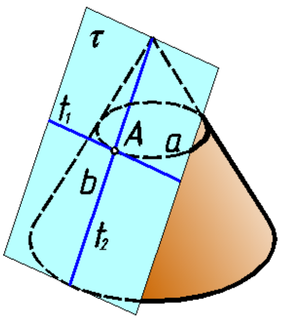


Рис. 234

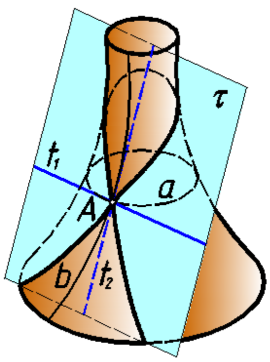


Рис. 235

Существуют поверхности, имеющие несколько различных типов точек. Например, поверхность открытого тора обладает точками всех трех типов: на наружной части поверхности находятся точки эллиптического типа, на внутренней части поверхности — точки гиперболического типа, на границе внешней и внутренней частей поверхности — точки параболического типа.

Рассмотрим построение проекций касательной плоскости и нормали к поверхности сферы (рис.236).

Через точку $\boldsymbol{A}$ на сфере можно провести касательные $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$ к двум окружностям $\boldsymbol{c_1}$ и $\boldsymbol{c_2}$, проходящим на поверхности через точку $\boldsymbol{A}$ и параллельных горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций. Касательная к плоской кривой лежит в плоскости этой кривой.

Нормаль $\boldsymbol{n}$ к сфере всегда проходит через центр сферы.

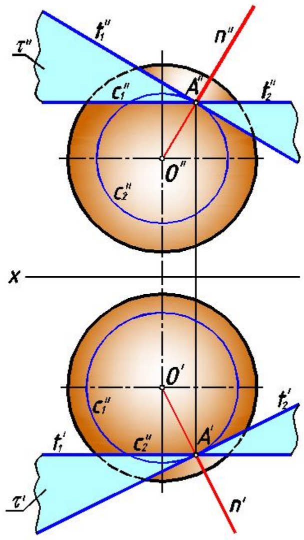


Рис. 236

Построение проекций касательной плоскости и нормали к поверхности конуса дано на рис.237.

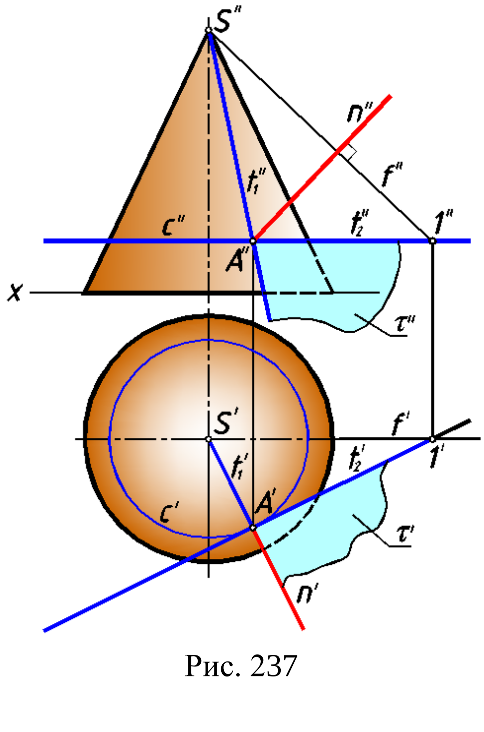


Рис. 237

Плоскость касается конической поверхности по образующей t_1, которая принадлежит касательной плоскости. Достаточно провести ещё касательную t_2 к окружности c, проходящей через точку A.

Для проведения нормали n через точку A проводим перпендикуляр к касательной плоскости (фронтальная проекция нормали перпендикулярна фронтальной проекции фронтали касательной плоскости).

Рассмотрим построение проекций касательной плоскости и нормали к поверхности тора (рис.238).

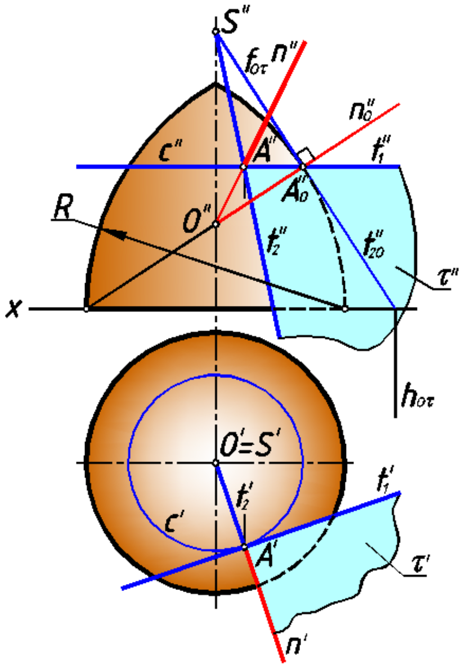


Рис. 238

Для построения касательной плоскости, проходящей через точку A на торе достаточно провести касательные к двум линиям, проходящим на поверхности через точку A. Одной из таких линий является параллель c — окружность, параллельная горизонтальной плоскости проекций. Вторая линия — меридиан поверхности (дуга окружности радиусом R).

Построить касательную t_1 к параллели c не сложно.

Меридиан поверхности не параллелен фронтальной плоскости проекций и проецируется на нее дугой эллипса. Чтобы избежать построения лекальной кривой, используем способ преобразования чертежа — вращение вокруг проецирующей прямой. Меридиональную плоскость вместе с точкой A повернем вокруг оси поверхности в положение главной меридиональной плоскости. Меридиан, проходящий через точку A, совместится с главным меридианом, а точка A займет положение A_0. Касательная t_{20} к главному меридиану в точке A_0 пересекает ось поверхности в точке S. Поскольку точка S при вращении вокруг оси тора неподвижна, то касательная t_2 к поверхности пройдет через эту точку.

Заметим, что плоскость τ, касательная к поверхности тора в точке A_0 перпендикулярна фронтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция нормали n_0 к поверхности в точке A_0 перпендикулярна фронтальному следу $f_{0\tau}$ касательной плоскости. Нормаль n_0 пересекает ось поверхности в точке O, через которую проходит фронтальная проекция n'' нормали к поверхности в точке A.

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какая прямая называется касательной к поверхности в заданной точке?*
- *Какая плоскость называется касательной к поверхности в заданной точке?*
- *Какая прямая называется нормалью к поверхности в заданной точке?*
- *Каким может быть взаимное положение поверхности и касательной к ней плоскости?*
- *Как на чертеже задать касательную плоскость к поверхности?*
- *Как построить проекции нормали к поверхности?*
- *Как построить проекции нормали к поверхности вращения без построения касательной плоскости?*
-

§41. ПОСТРОЕНИЕ ОЧЕРКА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ, ОСЬ КОТОРОЙ НАКЛОНЕНА К ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Если ось поверхности вращения наклонена к плоскости проекций, то на эту плоскость поверхность проецируется с искажением.

Рассмотрим построение очерковых образующих конической поверхности вращения, ось которой параллельна фронтальной плоскости проекций, но наклонена к горизонтальной плоскости проекций (рис.239).

На оси конуса выбираем произвольную точку ***O*** и, взяв её за центр сферы, впишем сферу, касающуюся конической поверхности по параллели ***c***.

Образующими конуса, являющимися очерковыми при проецировании на горизонтальную плоскость проекций, будут образующие, по которым горизонтально проецирующие плоскости касаются конической поверхности. Эта плоскости будут касаться вписанной сферы в точках ***A*** и ***B***, лежащих на экваторе сферы. Искомые касательные ***a*** и ***b*** проходят через точки ***A*** и ***B*** и вершину конуса ***S***. Горизонтальные проекции этих прямых задают очерк конической поверхности на горизонтальной плоскости проекций, а их фронтальные проекции определяют границу видимости поверхности на ее горизонтальной проекции

Следует обратить внимание, что угол между очерковыми образующими на фронтальной плоскости проекций отличается от угла между очерковыми образующими на горизонтальной плоскости проекций.

На рис.240 задана поверхность вращения, ось которой параллельна фронтальной плоскости проекции, но наклонена к горизонтальной плоскости проекций. Для построения горизонтального очерка этой поверхности используют следующий прием. В поверхность вписывают ряд сфер, центры которых находятся на оси поверхности. Построив горизонтальные проекции этих сфер, проводят кривую линию, огибающую эти сферы. Построенная кривая является горизонтальным очерком поверхности.

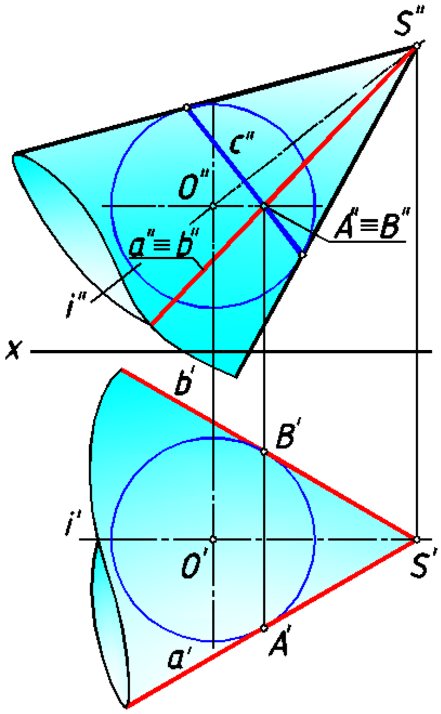


Рис. 239

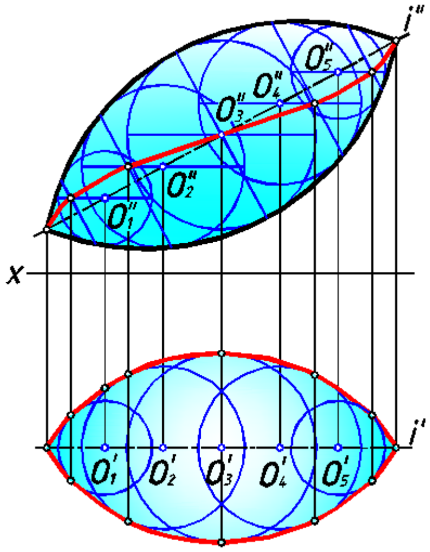


Рис. 240

__Вопросы для самопроверки__

- *Как построить очерковые образующие конуса вращения, ось которого наклонена к одной из плоскостей проекций?*

Глава VIII
МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

К метрическим задачам относятся задачи на определение расстояний и углов между геометрическими фигурами, а также задачи на построение отрезка и угла с наперед заданным значением, соответственно, линейной и градусной величины.

В основе алгоритма решения любой метрической задачи лежит третий инвариант ортогонального проецирования:

$$\Phi \parallel \pi_1 \Rightarrow \Phi' \cong \Phi$$

или

$$\Phi \parallel \pi_2 \Rightarrow \Phi'' \cong \Phi$$

§42. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Расстояние между геометрическими фигурами определяется величиной кратчайшего отрезка прямой между двумя точками, принадлежащими этим фигурам.

Длину отрезка прямой можно определить различными способами: построением прямоугольного треугольника (рис.46, 47), заменой плоскостей проекций (рис.100), вращением вокруг проецирующей прямой (рис.114).

42.1. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой линии равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую.

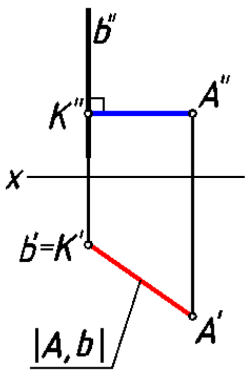


Рис. 241

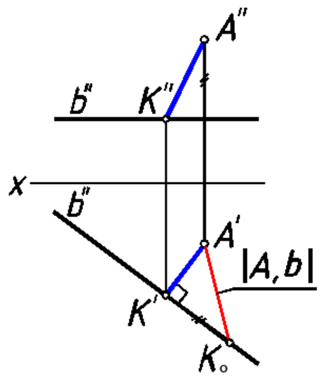


Рис. 242

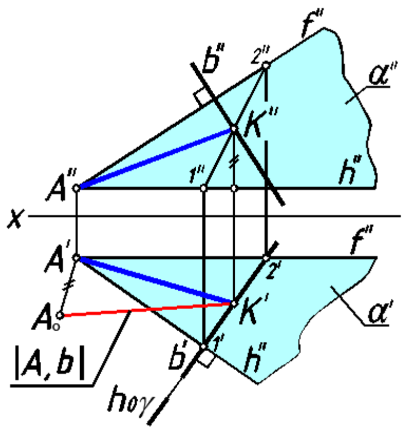


Рис. 243

На рис.241 отрезок ***AK*** является перпендикуляром, опущенным из точки ***A*** на прямую ***b***. На горизонтальную плоскость проекции π_1 он проецируется в натуральную величину.

На рис.242 прямой угол между ***AK*** и прямой ***b*** проецируется без искажения (на основании теоремы о частном случае проецирования прямого угла). Перпендикуляр ***AB*** на обе плоскости проекций проецируется с искажением.

На рис.243 для проведения перпендикуляра к прямой ***b*** общего положения из точки ***A*** следует сначала через точку ***A*** провести плоскость α, перпендикулярную прямой ***b***. Эта плоскость является множеством прямых, проходящих через точку ***A*** и составляющих с прямой b угол 90°. Точка K пересечения прямой b с плоскостью α является основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую b.

42.2. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.

На рис.244 плоскость α перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. Отрезок AK, определяющий расстояние от точки A до плоскости α, параллелен плоскости проекций π_1 и проецируется на неё в натуральную величину.

На рис.245 плоскость α занимает общее положение относительно плоскостей проекций. Поэтому целесообразно, сначала заменой плоскостей проекций преобразовать чертеж так, чтобы плоскость стала перпендикулярна новой плоскости проекций π_3.

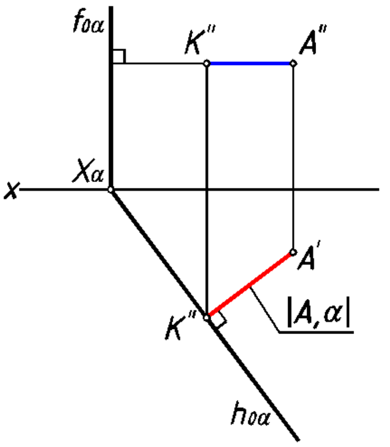


Рис. 244

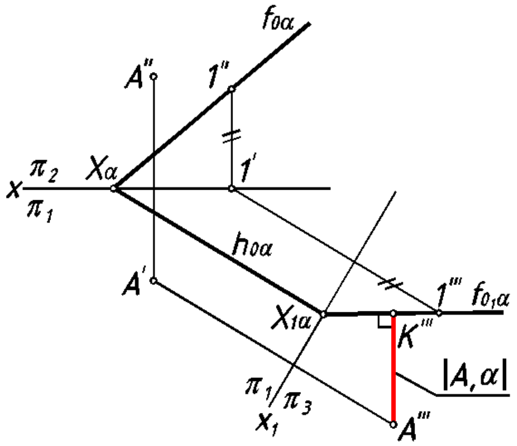


Рис. 245

42.3. Расстояние от точки до поверхности

Расстояние от точки до поверхности определяется величиной нормали, проведенной из точки к поверхности.

Определение расстояния от точки до поверхности вращения рассмотрим на примере определения расстояния от точки A до конической поверхности вращения (рис.246).

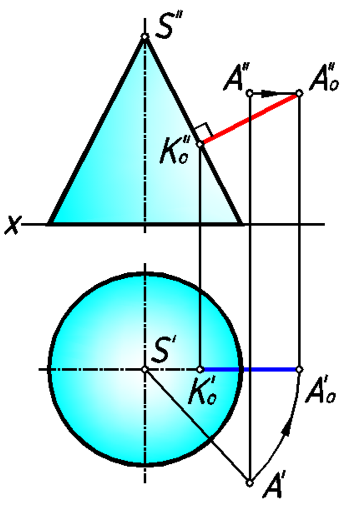


Рис. 246

Нормаль к поверхности вращения расположена в меридиональной плоскости, проходящей через ось поверхности вращения.

Для решения данной задачи удобнее всего использовать способ вращения вокруг проецирующей прямой. Меридиональную плоскость, которой принадлежит нормаль, поворотом вокруг оси поверхности совмещаем с плоскостью главного меридиана. Точка ***A*** перейдет в новое положение ***Ao***. Перпендикуляр, опущенный из фронтальной проекции точки ***Ao*** на очерковую образующую конуса равен расстоянию от точки ***A*** до поверхности.

43.4. Расстояние между параллельными прямыми

Расстояние между параллельными прямыми измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной прямой на другую.

Из определения ясно, что решение задачи сводится к нахождению расстояния от точки до прямой (см. выше).

43.5. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми линиями определяется отрезком прямой, заключенным между этими прямыми и перпендикулярным к обеим прямым.

Такой перпендикуляр можно провести лишь один.

На рис.247 представлен случай, когда одна из скрещивающихся прямых ***a*** занимает проецирующее положение относительно плоскости π_1, а вторая прямая ***b*** — общего положения. Отрезок ***AB*** перпендикулярен обеим прямым (частный случай проецирования прямого угла) и параллелен горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, горизонтальная проекция отрезка ***A'B'*** равна расстоянию между прямыми ***a*** и ***b***.

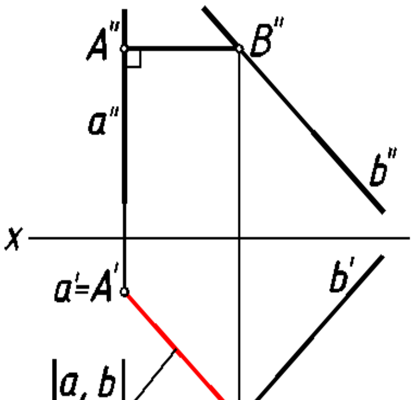


Рис. 247

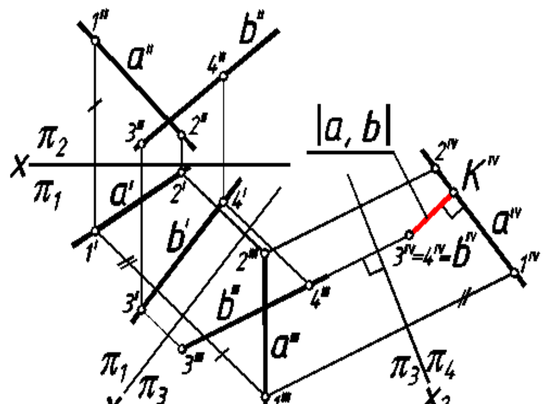


Рис. 248

На рис.248, где скрещивающиеся прямые ***a*** и ***b*** занимают общее положение относительно плоскостей проекций, последовательной заменой двух плоскостей проекций чертёж преобразован так, что одна из заданных скрещивающихся прямых ***b*** заняла положение перпендикулярное новой плоскости проекций π_4. Перпендикуляр к обеим скрещивающимся прямым определяет расстояние между ними.

Еще один подход к решению задачи состоит в следующем. Две скрещивающиеся прямые можно заключить в единственную пару параллельных плоскостей, расстояние между которыми будет равно расстоянию между этими скрещивающимися прямыми. Либо одну из прямых заключить в плоскость, параллельную второй прямой, и найти расстояние между этой плоскостью и параллельной ей прямой.

43.6. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью определяется величиной перпендикуляра, опущенного из произвольной точки прямой на плоскость, т.е. сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости.(см. выше).

43.7. Расстояние между параллельными плоскостями

Расстояние между параллельными плоскостями определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной из плоскостей, на другую плоскость, ти.е. сводится к определению расстояния от точки до плоскости (см. выше).

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какие задачи относятся к метрическим?*
- *Что называется расстоянием между двумя геометрическими фигурами?*
- *Каким способом можно определить длину отрезка прямой?*
- *Как измерить расстояние от точки до прямой линии, от точки до плоскости, от точки до поверхности?*
- *Как измерить расстояние между параллельными прямыми?*
- *Как определяется расстояние между скрещивающимися прямыми?*
- *Как измерить расстояние между параллельными прямой и плоскостью, между параллельными плоскостями?*

§43. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН УГЛОВ

Определение угла между прямой и плоскостью, двумя плоскостями, скрещивающимися прямыми сводится к нахождению угла между двумя прямыми.

43.1. Угол между пересекающимися прямыми

Угол между пересекающимися прямыми проецируется на плоскость проекций без искажения, когда плоскость этого угла параллельна плоскости проекций.

Проще всего задача решается вращением плоскости угла вокруг линии уровня

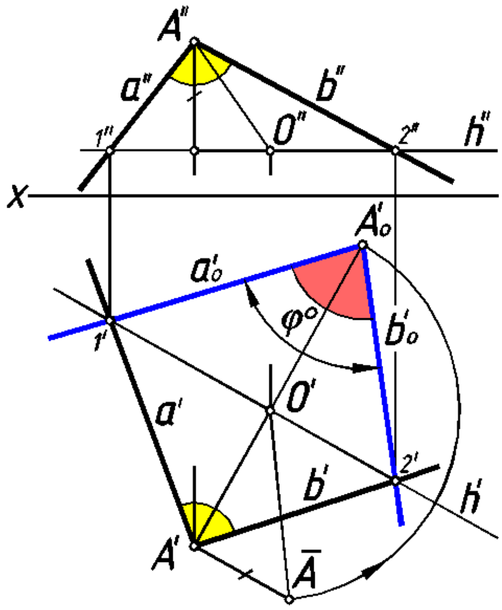


Рис. 249

43.2. Угол между скрещивающимися прямыми

Угол между скрещивающимися прямыми определяется величиной плоского угла, образованного пересекающимися прямыми, параллельными заданным скрещивающимся прямым.

На рис.250 представлено решение задачи по определению угла между скрещивающимися прямыми ***a*** и ***b***. С этой целью через точку *A* на прямой ***b*** проведена прямая ***c***, параллельная прямой ***a***. Величина угла ***φ°*** между пересекающимися прямыми ***a*** и ***c*** определяет величину угла между скрещивающимися прямыми ***a*** и ***b***.

Для определения величины угла ***φ°*** использовано вращение вокруг фронтали ***f***.

Совпадение проекций ***c′*** и ***a′*** позволяет избежать лишних построений.

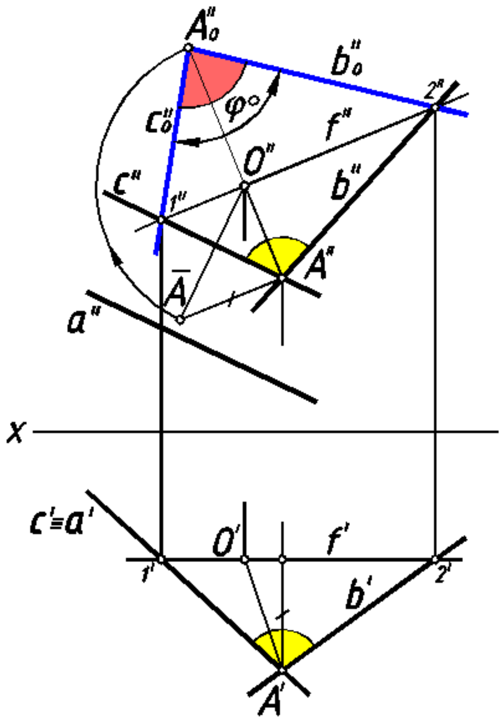


Рис. 250

43.3. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой a и плоскостью α определяют величиной острого угла φ° между этой прямой и её проекцией a^α на данную плоскость (рис.251).

Для нахождения проекции прямой a на плоскость α нужно: найти точку B пересечения прямой a с плоскостью α, затем из произвольной точки A прямой a провести прямую n, перпендикулярную плоскости α, и найти точку A^α пересечения этой прямой n с плоскостью α. Через найденные точки B и A^α провести прямую a^α, которая будет проекцией a прямой на плоскость α.

Если решать задачу по изложенной схеме, то решение будет довольно сложным.

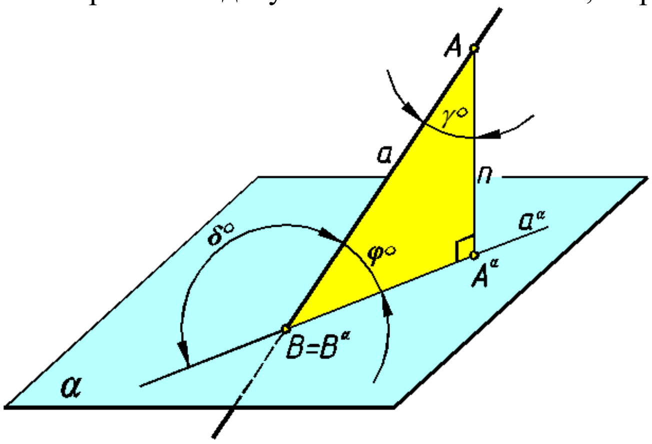


Рис. 251

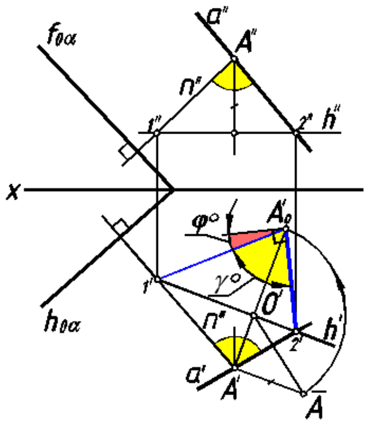


Рис. 252

Из рис.251 видно, что угол γ° между прямой a и перпендикуляром n к плоскости α, проведенным через произвольную точку A прямой a, равен 90° — φ°. Поэтому решение задачи можно упростить следующим образом:

1) на прямой выбрать произвольную точку A;

2) через выбранную точку А провести прямую n, перпендикулярную плоскости α;

3) определить величину острого угла γ° между заданной прямой a и проведенной прямой n;

4) определить величину острого угла $\varphi^\circ = 90^0 - \gamma^\circ$.

Применение изложенного способа позволяет избежать решения двух трудоемких задач нахождения точек пересечения прямых a и b с плоскостью α.

На рис.252 представлено решение задачи по определению угла между прямой a и плоскостью α на проекционном чертеже. Через точку A, принадлежащую прямой a, проведен перпендикуляр n к плоскости α. Вращением вокруг горизонтали h найдена величина угла γ° между прямыми a и n. Дополняющий угол γ° до 90° является искомым углом φ° между прямой a и плоскостью α.

43.4. Угол наклона прямой к плоскости проекций

Угол наклона прямой к плоскости проекций проецируется без искажения, если прямая параллельна плоскости проекций (рис.28-33).

В случае, когда задана прямая общего положения, следует применить способы преобразования чертежа: замену плоскостей проекций (рис.100) или вращение вокруг проецирующей прямой (рис.114).

Напомним, что построением прямоугольного треугольника также можно найти угол наклона прямой к плоскости проекций (рис.47).

43.5. Угол между плоскостями

Двугранный угол между плоскостями определяют величиной плоского острого угла между прямыми, принадлежащими этим плоскостям и перпендикулярными прямой пересечения плоскостей.

На рис.253 показан такой угол φ°. Если вне плоскостей взять произвольную точку A и провести через нее прямые n_1 и n_2, перпендикулярные заданным плоскостям α и β, то величина угла φ° между этими прямыми n_1 и n_2 будет равна величине угла между плоскостями α и β.

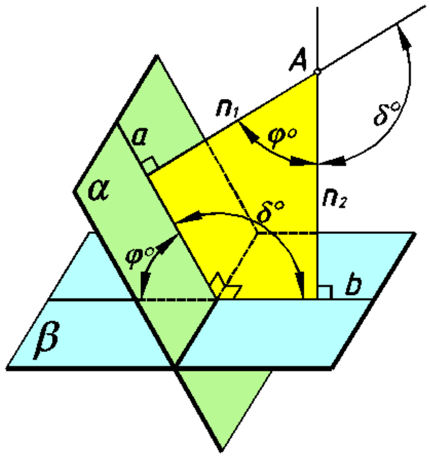


Рис. 253

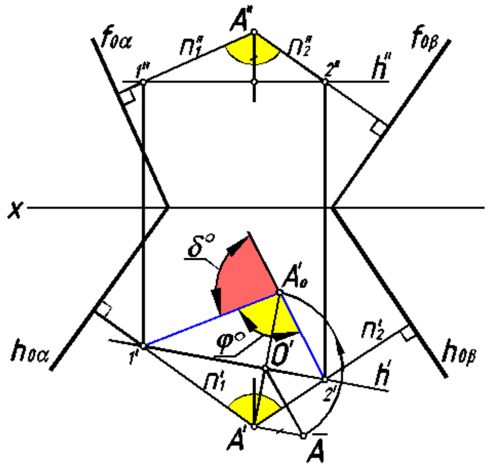


Рис. 254

Следовательно, задачу можно решить следующим образом:

1) выбрать в пространстве произвольную точку А;

2) через выбранную точку A провести прямые n_1 и n_2, перпендикулярные заданным плоскостям α и β;

3) определить величину острого угла φ° между прямыми n_1 и n_2.

На рис.254 приведено проекционное решение задачи по определению угла между плоскостями α и β. Через точку A проведены две прямые n_1 и n_2, перпендикулярные заданным плоскостям α и β.

Вращением вокруг горизонтали определена величина угла φ° между ними.

Найденный угол φ° оказался тупым, поэтому за искомый угол следует принять острый угол δ°, дополняющий угол φ° до 180° .

43.6. Угол наклона плоскости к плоскости проекций

Угол наклона плоскости к плоскости проекций проецируется без искажения, если плоскость перпендикулярна плоскости проекций (см. рисунки 61, 63, 65).

Для определения угла наклона плоскости общего положения можно также построить линию наибольшего наклона этой плоскости к плоскости проекций (рис.82-86) и определить угол наклона ее к соответствующей плоскости проекций.

Простое решение задачи дает применение способа замены плоскостей проекций (рис.103 и 106).

Вопросы для самопроверки

- *В каком случае угол между прямыми проецируется на плоскость без искажения?*
- *Что называется углом между скрещивающимися прямыми?*
- *Что называется углом между прямой и плоскостью?*
- *Как связаны между собой угол наклона прямой к плоскости и угол между прямой и перпендикуляром к плоскости?*
- *Почему определение угла между прямой и перпендикуляром к плоскости проще, чем определение угла между прямой и плоскостью?*
- *Что называется углом между плоскостями?*
- *В каком случае угол между плоскостями проецируется в натуральную величину?*

РАЗВЁРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§44. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Разверткой поверхности называется плоская фигура, полученная в результате совмещения этой поверхности с плоскостью.

При построении разверток удобно рассматривать поверхность как тонкую нерастяжимую пленку. Тогда каждой точке поверхности будет соответствовать определенная точка на развертке, а площадь развертки будет равна площади развертываемой поверхности.

Среди поверхностей существует такие, которые можно путем изгибания совместить с плоскостью без разрывов и складок, например, гранная, цилиндрическая и коническая поверхности. Такие поверхности называются *развертываемыми* поверхностями. В противном случае поверхности называются *неразвертываемыми* (например, поверхность сферы и тора).

К основным свойствам разверток относятся следующие (рис.255):

1. длины двух соответственных линий поверхности и ее развертки равны между собой;
2. угол между линиями на поверхности равен углу между соответственными им линиями на развертке. Отсюда следует, что параллельным прямым на поверхности соответствуют параллельные прямые на развертке;
3. прямой линии на поверхности соответствует прямая линия на развертке;
4. площадь замкнутой фигуры на поверхности равна площади той же фигуры на развертке.
5. если линии, принадлежащей поверхности и соединяющей две точки поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта линия является *геодезической*, т.е. кратчайшей между двумя точками.

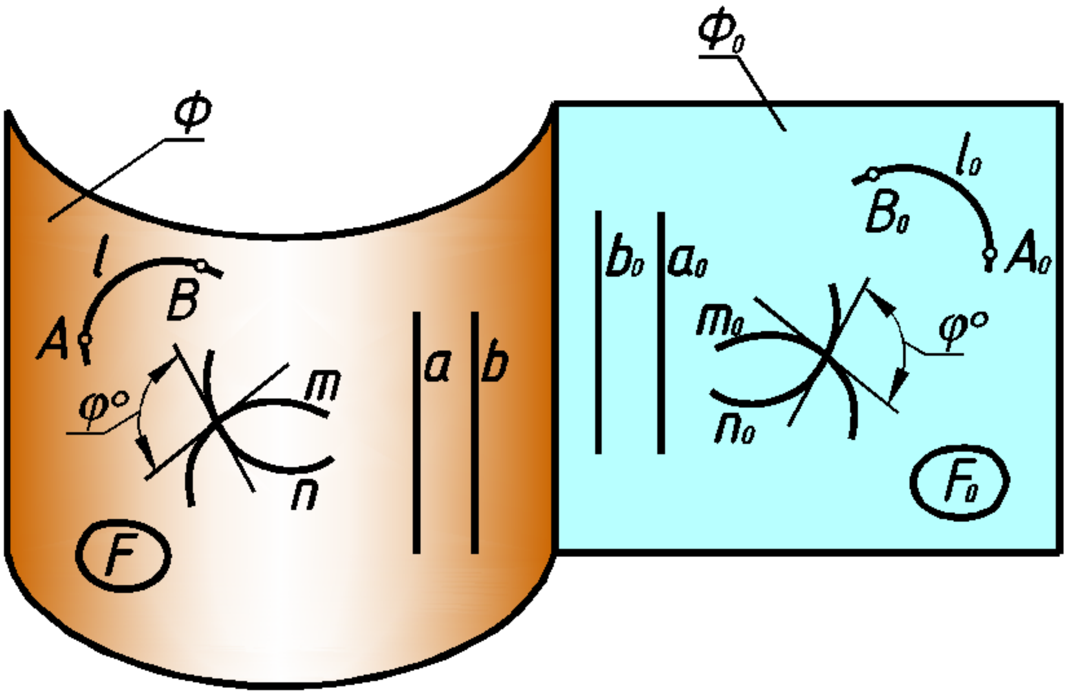


Рис. 255

Различают следующие виды разверток:
1. точные — для многогранников;
2. приближенные — для развертываемых кривых поверхностей;
3. условные — для неразвертываемых поверхностей.

Признаком развёртываемости на плоскость обладают лишь три вида линейчатых поверхностей: цилиндрические, конические и торсовые.

Для этих поверхностей строятся приближённые развёртки, ибо они в процессе построений развёртки заменяются (аппроксимируются) вписанными или описанными многогранными поверхностями. Необходимость аппроксимации вызвана тем, что спрямление направляющих линий указанных поверхностей основано на их замене вписанными или описанными многоугольниками. ***Точные развёртки*** аппроксимирующих многогранных поверхностей принимаются за ***приближённые развёртки*** развёртываемых поверхностей.

Все остальные поверхности теоретически не развёртываются на плоскость, но практика требует построения их «развёрток». Для таких поверхностей строятся ***условные развёртки.***

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Что называется разверткой поверхности?*
- *Какие поверхности называются развертываемыми?*
- *Каковы основные свойства разверток?*
- *Какие различают виды разверток?*

§45. ТОЧНЫЕ РАЗВЕРТКИ МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развёрткой многогранной поверхности называется совокупность конгруэнтных её граням многоугольников, расположенных в одной плоскости.[8]

Для построения развертки многогранной поверхности нужно совместить все грани этой поверхности с одной плоскостью так, чтобы образовалась плоская фигура. При этом смежными будут две грани, имеющие общее ребро.

Для одной и той же поверхности вид ее развертки может быть различным в зависимости от избранной последовательности расположения граней на развертке.

Все грани на развертке изображаются в натуральную величину, поэтому ее построение в общем случае сводится к нахождению натуральных величин отдельных граней поверхности.

Существуют три способа построения разверток многогранных (призматических) поверхностей:
1. Способ треугольников (триангуляции);
2. Способ нормального сечения;
3. Способ раскатки.

46.1. Способ триангуляции

Следует заметить, что способ триангуляции является универсальным. Он пригоден для построения разверток любых многогранных поверхностей, а также приближенных и условных разверток линейчатых поверхностей. Так, например, построение развертки поверхности призмы способом триангуляции можно осуществить в такой последовательности:

– в каждой грани призмы провести диагональ, которая разобьет ее на два треугольника;
– определить натуральные величины сторон этих треугольников;
– на плоскости последовательно построить треугольники, конгруэнтные данным.

Способ основан на свойстве «жесткости» треугольника — три отрезка определяют единственный треугольник. В то время как четыре, пять, … отрезков определяют бесчисленное множество четырех-, пяти-, …угольников.

Развертка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников — граней пирамиды. Поэтому задача сводится к определению натуральных величин граней пирамиды и дальнейшему последовательному построению их на плоскости как треугольников с известными сторонами.

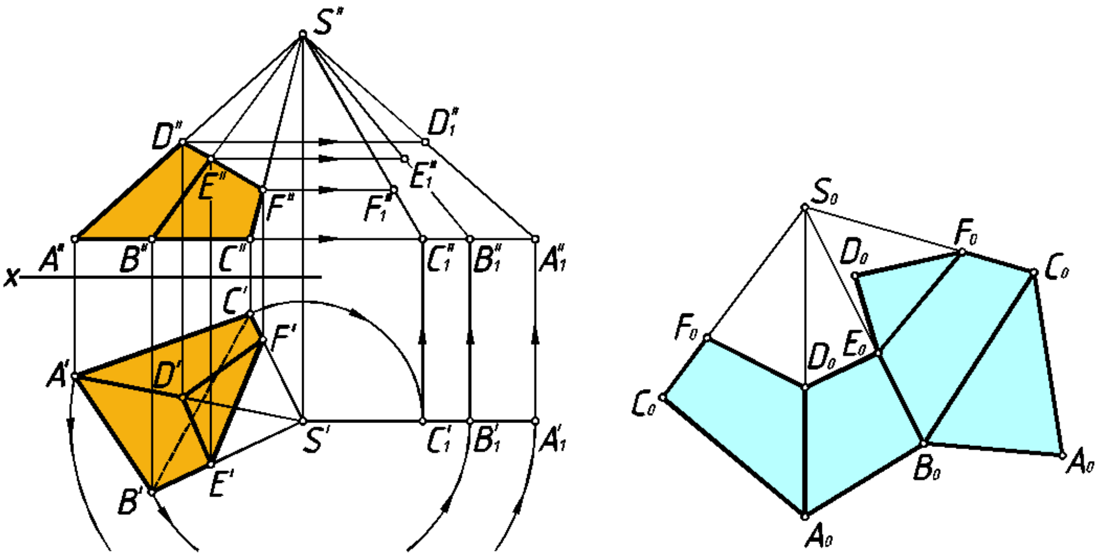


Рис. 256

Построение полной развертки поверхности усеченной пирамиды ***ABCDEF***, являющейся частью пирамиды ***SABC*** представлено на рис.256.

Решение начинаем с построения развертки боковой поверхности пирамиды. Для этого:

1. Определяем длины ребер ***SA***, ***SB***, ***SC***, ***SD***, ***SE*** и ***SF*** пирамиды (на рисунке это выполнено способом вращения вокруг проецирующей прямой — высоты пирамиды);

2. Из произвольной точки S_0 проводим прямую и откладываем на ней от точки S_0 отрезок S_0 A_0, конгруэнтный ребру ***SA*** пирамиды и отрезок S_0 D_0, конгруэнтный ребру ***SD***.

3. Из точки A_0 проводим дугу радиусом $A'B'$, а из точки S_0 — дугу радиусом S_0B_1, пересечение которых указывает положение вершины B_0 треугольника $S_0A_0B_0$ — грани пирамиды. На отрезке S_0B_0 отмечаем точку E_0;

4. Аналогично находим точки C_0 и F_0;

5. Соединив точки A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0 получаем развертку боковой поверхности пирамиды.

Для получения полной развертки пирамиды к стороне B_0C_0 развертки боковой ее поверхности пристроено основание ***ABC*** пирамиды.

46.2. Способ нормальных сечений

Этот способ удобно применять для построения разверток призматических поверхностей, *боковые ребра которых являются линиями уровня*.

Применение этого способа показано на примере построения развертки наклонной треугольной призмы ***ABCDEF*** (рис.257).

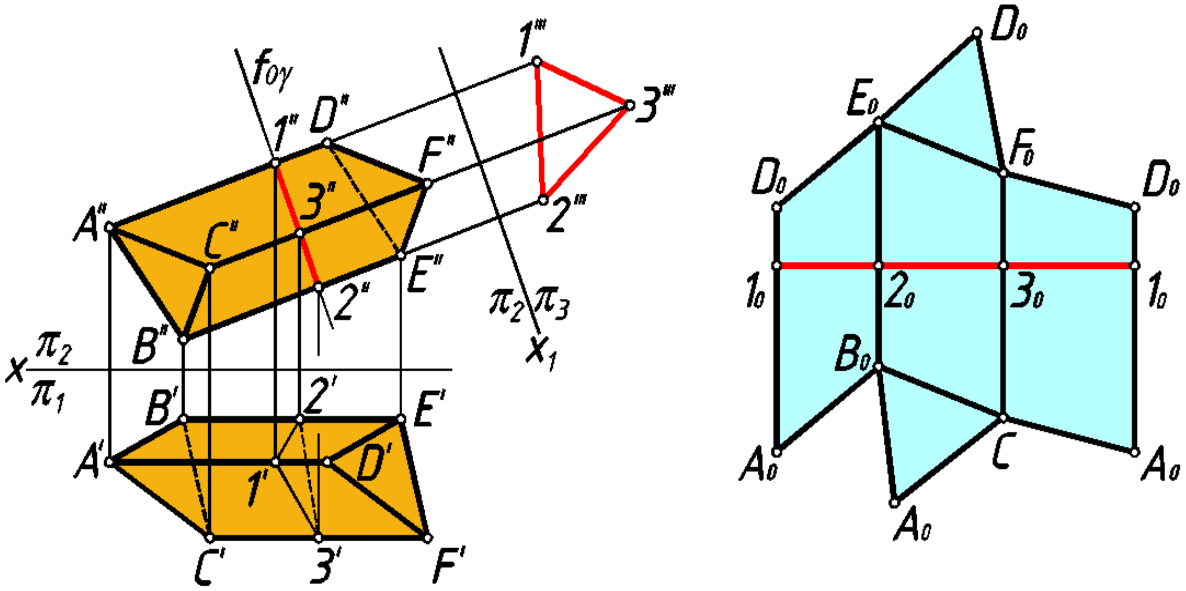


Рис. 257

Решение начинаем с построения развертки боковой поверхности заданной призмы. На чертеже видно, что боковые ребра призмы параллельны плоскости $\boldsymbol{\pi_2}$. Пересечем призму плоскостью $\boldsymbol{\gamma}$, перпендикулярной ее боковым ребрам. Сечение призмы такой плоскостью называется нормальным. В представленном примере таким сечением является треугольник ***123***.

Определим натуральный вид нормального сечения с помощью замены плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$ на плоскость $\boldsymbol{\pi_3} \parallel \gamma$.

Знаяя величины сторон нормального сечения и длины боковых ребер, можно определить натуральный вид каждой грани и обоих оснований призмы и построить ее развертку.

Для этого:

1. На произвольной горизонтальной прямой откладываем отрезки $\boldsymbol{1_0 2_0}$, $\boldsymbol{2_0 3_0}$, $\boldsymbol{3_0 1_0}$, конгруэнтные сторонам треугольника ***123*** (спрямляем нормальное сечение);

2. Через точки $\boldsymbol{1_0}$, $\boldsymbol{2_0}$, $\boldsymbol{3_0}$, $\boldsymbol{1_0}$ проводим вертикальные прямые и откладываем на них отрезки $\boldsymbol{1_0 A_0}$, $\boldsymbol{1_0 D_0}$, $\boldsymbol{2_0 B_0}$ и т.д., равные отрезкам ***1A***,***1D***, ***2B*** и т.д. боковых ребер призмы, с учетом их расположения по отношению к плоскости $\boldsymbol{\gamma}$ (справа или слева);

3. Полученные точки $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{B_0}$, $\boldsymbol{C_0}$, $\boldsymbol{A_0}$ и $\boldsymbol{D_0}$, $\boldsymbol{E_0}$, $\boldsymbol{F_0}$, $\boldsymbol{D_0}$ соединяем отрезками прямой линии.

Плоская фигура $\boldsymbol{A_0B_0C_0A_0D_0E_0F_0D_0}$ представляет собой развертку боковой поверхности призмы, построенную способом нормального сечения.

Для получения полной развертки призмы к развертке боковой поверхности пристроены основания призмы — треугольники $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$ и $\boldsymbol{D_0E_0F_0}$.

46.3. Способ раскатки

Способ раскатки — это частный случай способа нормальных сечений.

Этот способ целесообразно использовать для построения развертки поверхности призмы в том случае, когда *основание призмы параллельно какой-либо одной плоскости проекций, а ее ребра параллельны другой плоскости проекций*.

На рис.258 показано построение развертки треугольной призмы ***ABCDEF*** способом раскатки.

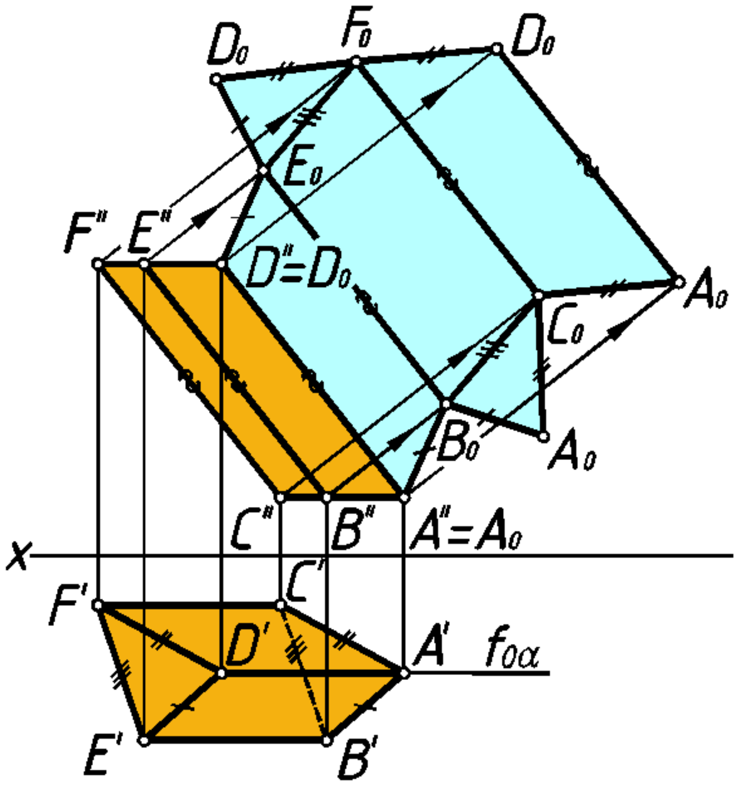


Рис. 258

Основания призмы ***ABC*** и ***DEF*** параллельны горизонтальной плоскости проекций, поэтому проецируются на нее в натуральную величину. Боковые ребра ***AD***, ***BE*** и ***CF*** параллельны фронтальной плоскости проекций, поэтому проецируются на нее в натуральную величину.

Проведем через ребро ***AD*** плоскость $\boldsymbol{\alpha}$, параллельную плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_2}$.

Будем последовательно поворачивать призму вокруг ее ребер, перекатывая ее по плоскости $\boldsymbol{\alpha}$. Если допустить, что грани призмы, совмещаясь с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$, отпечатываются на ней, то, совмещая все отпечатки граней призмы, получим развертку ее боковой поверхности.

Приведем последовательность действий для решения данной задачи:

1. Мысленно разрежем поверхность призмы по ребру ***AD***, а затем осуществим поворот грани **ADEB** вокруг ребра ***AD*** ($A''D''$).

2. Для нахождения совмещенного с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ положения ребра B_0E_0 из точки B'' проводим луч, перпендикулярный к $A''D''$ (A_0D_0), и засекаем на нем дугой — радиуса $A'B'$, проведенной из центра A'', точку B_0. Через B_0 проводим прямую B_0E_0, параллельную и равную $A''D''$.

3. Принимаем совмещенное положение ребра B_0E_0 за новую ось и вращаем вокруг нее грань ***BEFC*** до совмещения с плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$. Для этого из точки C'' проводим луч,

перпендикулярный к совмещенному ребру B_0E_0, а из точки B_0 — дугу окружности радиусом $B'C'$. Пересечение дуги с лучом определит положение точки C_0. Через C_0 проводим прямую C_0F_0 параллельно B_0E_0.

4. Аналогично находим положение ребра A_0D_0.

5. Соединив точки A'' (A_0), B_0, C_0, A_0 и D'' (D_0), E_0, F_0, D_0 прямыми, получим фигуру $A_0B_0C_0A_0D_0E_0F_0D_0$ — развертку боковой поверхности призмы.

Для построения полной развертки призмы, нужно к каким-либо из звеньев ломаных линий, ограничивающих развертку боковой поверхности, пристроить фигуры, конгруэнтные основаниям данной призмы (например, треугольники $B_0C_0A_0$ и $E_0F_0D_0$).

Вопросы для самопроверки

- *Какие существуют способы построения точных разверток?*
- *В чем суть способа нормального сечения, в каком случае он применяется?*
- *В чем суть способа раскатки, в каком случае он применяется?*
- *В чем суть способа триангуляции, в каком случае он применяется?*

§46. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РАЗВЕРТКИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развертки всех развертывающихся поверхностей (кроме гранных) являются приближенными, т.к. эти поверхности аппроксимируют (приближенно заменяют) поверхностями вписанных или описанных многогранников (призм или пирамид), что неизбежно приводит к потере точности.

46.1. Развертка цилиндрической поверхности

В тех случаях, когда требуется построить развертку цилиндрической поверхности, ее аппроксимируют призматической поверхностью, вписанной (или описанной) в данную цилиндрическую поверхность. Затем используют те же способы нормального сечения и раскатки, что и при развертывании боковой поверхности призмы.

На рис.259 показано построение развертки боковой поверхности эллиптического цилиндра с круговыми основаниями.

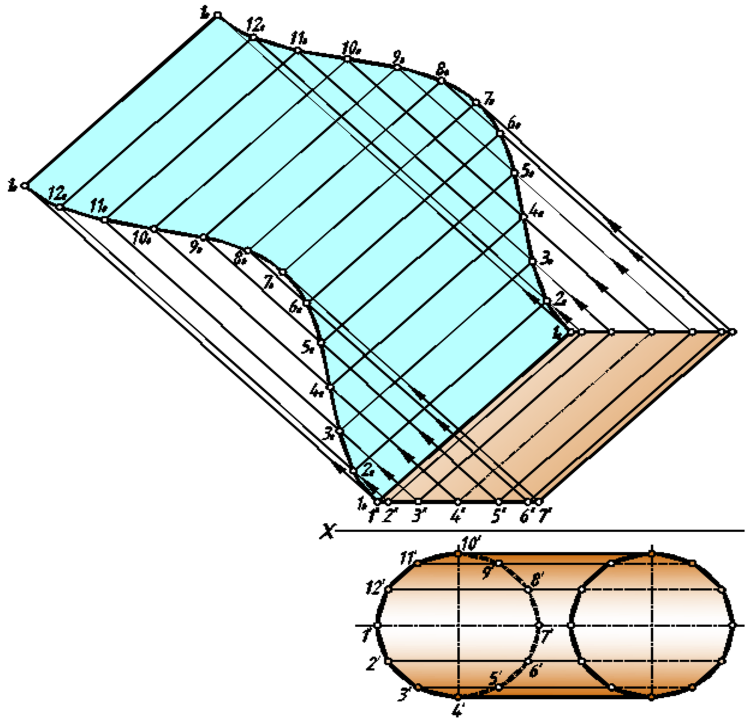


Рис. 259

В данном примере в цилиндрическую поверхность вписана двенадцатигранная призматическая поверхность. Развертка этой поверхности осуществлена способом раскатки так же, как на рис.258. Полученная развертка принимается за приближенную развертку цилиндрической поверхности.

Для построения разверток прямых цилиндра и конуса вращения можно воспользоваться аналитическими зависимостями между параметрами поверхности и развертки.

Очевидно, разверткой боковой поверхности цилиндра вращения радиуса $\boldsymbol{R}$ и высоты $\boldsymbol{h}$ является прямоугольник с размерами сторон $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{2\pi R}$.

46.2. Развертка конической поверхности

Для построения развертки коническая поверхность аппроксимируется вписанной (или описанной) в нее пирамидальной поверхностью. Развертка этой пирамидальной поверхности принимается за приближенную развертку аппроксимируемой конической поверхности. Чем больше число граней у пирамидальной поверхностей, тем меньше будет разница между действительной и построенной развертками поверхностей.

На рис.260 способом триангуляции построена развёртка конической поверхности, которая заменена поверхностью вписанной в неё двенадцатиугольной пирамиды. Развёртка представляет собой симметричную фигуру, так как поверхность имеет плоскость симметрии $\boldsymbol{\alpha}$. В этой плоскости лежит самая короткая образующая $\boldsymbol{S}$-$\boldsymbol{6}$. По ней и сделан разрез поверхности. Самая длинная образующая $\boldsymbol{S}$-$\boldsymbol{O}$ является осью симметрии развёртки поверхности.

Натуральные величины образующих определены с помощью вращения вокруг горизонтально проецирующей прямой, проходящей через вершину $\boldsymbol{S}$. Справа от оси симметрии $\boldsymbol{S_0}$-$\boldsymbol{O_0}$ строим шесть примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной $\boldsymbol{S_0}$. Каждый из треугольников строится по трём сторонам, при этом две стороны равны истинным величинам образующих, а третья — хорде, стягивающей дугу окружности основания между соседними точками деления. Построенные на развёртке точки O_0, 1_0, 2_0, ..., 6_0 соединяем плавной кривой линией.

Вторая половина развертки строится симметрично первой.

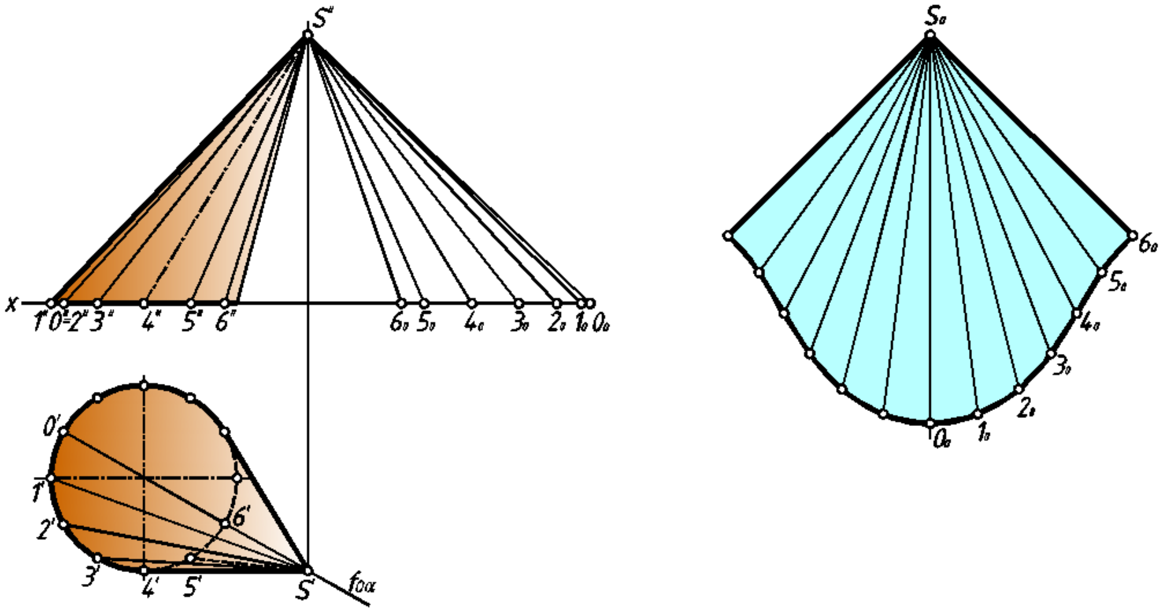


Рис. 260

Для построения развертки прямого кругового конуса можно воспользоваться аналитическими зависимостями между параметрами поверхности и развертки.

Разверткой поверхности конуса, имеющего длину образующей L и радиус основания R, будет сектор радиусом L с центральным углом $\varphi^\circ = 360^\circ \cdot R/L$ (рис.261).

Развертка усеченного конуса вращения представлена на рис.262.

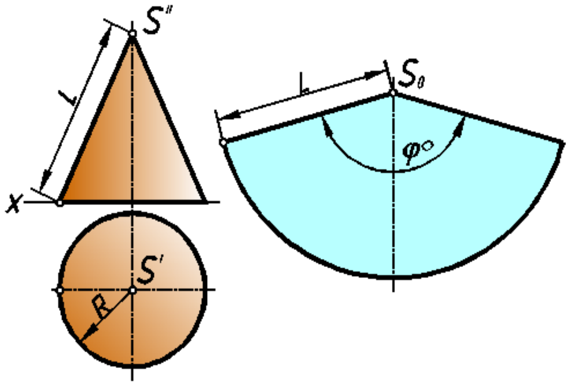


Рис. 261

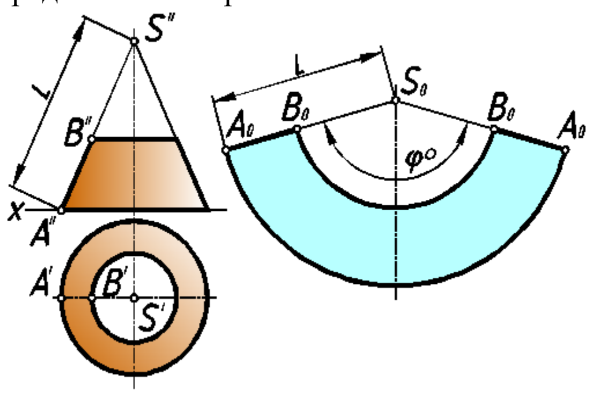


Рис. 262

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Развертки каких поверхностей являются приближенными и почему?*
- *Какими поверхностями аппроксимируют цилиндрические и конические поверхности при построении приближенных разверток?*
- *Что представляют собой развертки прямого кругового цилиндра и конуса?*
-

§47. УСЛОВНЫЕ РАЗВЕРТКИ НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Точную развертку неразвертывающейся поверхности построить нельзя. Для построения *условной развертки* такой поверхности применяют метод аппроксимации, который заключается в следующем. Данная неразвертывающаяся поверхность разбивается на ряд отсеков. Каждый из этих отсеков заменяется отсеком кривой развертывающейся поверхности.

На рис.263 представлен вариант замены отсека сферы отсеком цилиндрической поверхности. Для этого поверхность сферы меридиональными плоскостями разделяется на ряд одинаковых отсеков (лепестков). Каждый из сферических лепестков аппроксимируется лепестком цилиндрической поверхности, описанной около сферы. Набор из необходимого количества лепестков представляет собой условную развертку сферы.

На рис.264 представлен вариант замены отсеков сферы отсеками конических поверхностей. Для этого поверхность сферы плоскостями, параллельными плоскости экватора разделяется на ряд поясов. Каждый из сферических поясов аппроксимируется поясом конической поверхности, вершина которого находится на оси сферы, перпендикулярной плоскости экватора. Набор из разверток этих конических поясов представляет собой условную развертку сферы.

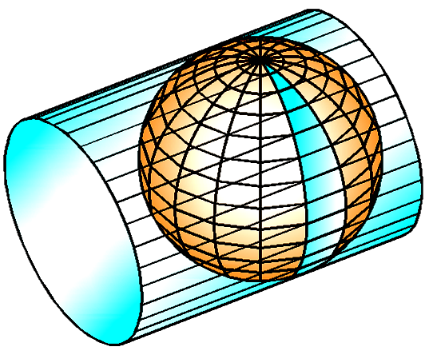


Рис. 263

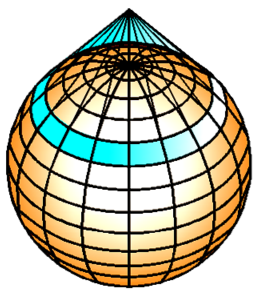


Рис. 264

На рис.265 представлено построение одного из отсеков сферы при аппроксимации ее отсеками цилиндрических поверхностей.

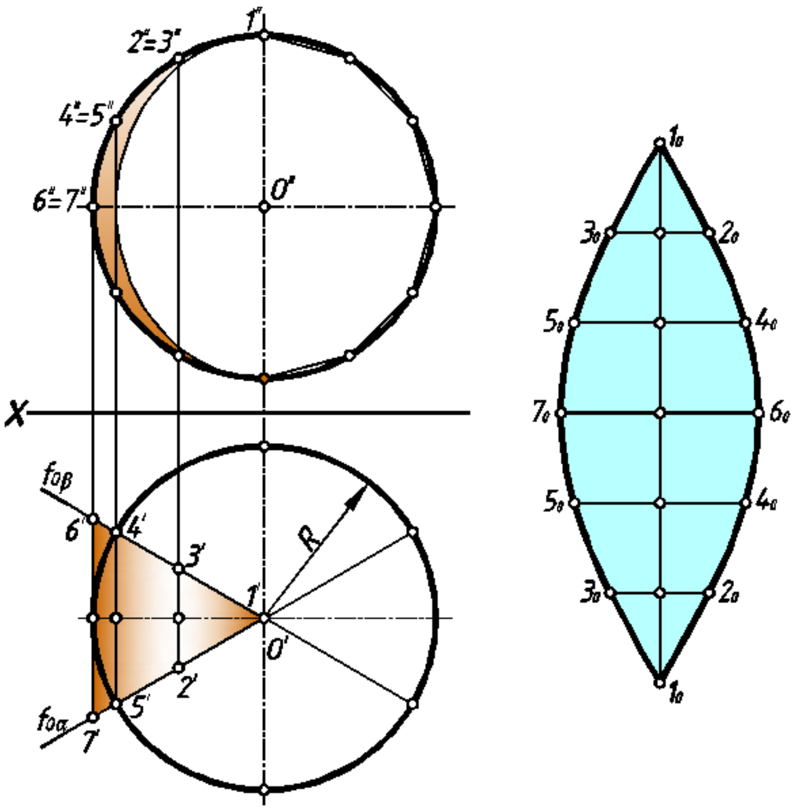


Рис. 265

Сфера меридиональными плоскостями α и β разделена на шесть равных отсеков (один из них подкрашен) Поверхность выделенного сферического отсека аппроксимируется отсеком цилиндрической поверхностью, направляющей которой является левая полуокружность главного меридиана, а образующие перпендикулярны плоскости проекции π_2.

Покажем последовательность построения развёртки выделенного отсека.

1. На вертикальной прямой откладывают отрезок 1_0-1_0, равный длине полуокружности главного меридиана сферы.
2. Дугу полуокружности главного меридиана сферы и соответствующий ей на развёртке отрезок 1_0-1_0, делят на одинаковое число равных частей (на рис.265 дуга и отрезок разделены на шесть частей).
3. Через точки деления на развёртке проводят горизонтальные линии, на которых откладывают симметрично относительно отрезка 1_0-1_0 длины соответствующих образующих отсека цилиндрической поверхности (2_0-3_0, 4_0-5_0, 6_0-7_0). Отметим, что образующие цилиндрического отсека, аппроксимирующие соответствующие дуги сферы, проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.
4. Точки 1_0, 3_0, 5_0, 7_0, 5_0, 3_0, 1_0 и точки 1_0, 2_0, 4_0, 6_0, 4_0, 2_0, 1_0 соединяют плавными кривыми линиями, которые и определяют контуры условной развёртки одного сферического отсека.

Совокупность шести таких отсеков (рис.266) представляет собой условную развёртку всей сферы. Чем больше число отсеков, на которые разбивается сфера, тем точнее аппроксимируют её отсеки цилиндрических поверхностей.

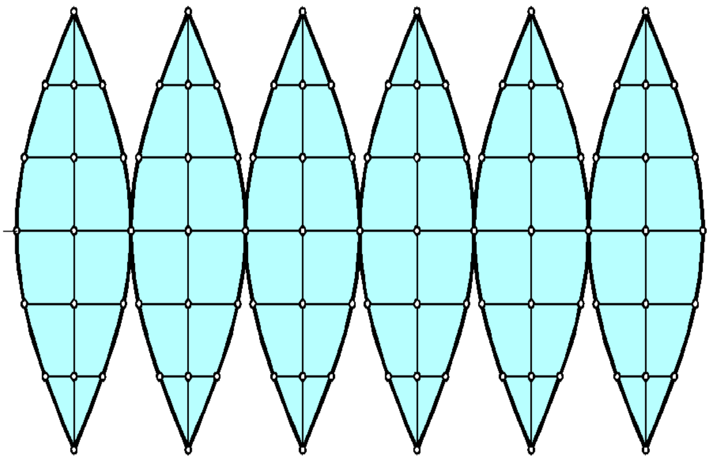


Рис. 266

Рассмотрим вариант построения условной развертки сферы при замене отсеков сферы отсеками конических поверхностей.

Для этого поверхность сферы плоскостями, параллельными плоскости экватора разделяют на ряд поясов **I**, **II**, **III**, **IV**, **V**, **VI** и **VII** (рис.267). Каждый из сферических поясов аппроксимируют поясом конической поверхности, вершина ***A***, ***B*** или ***C*** которого находится на оси сферы, перпендикулярной плоскости экватора (рис.268). Сферический пояс ***I***, прилегающий к экватору, можно аппроксимировать цилиндрической поверхностью. Набор из разверток этих поясов представляет собой условную развертку сферы (рис.269).

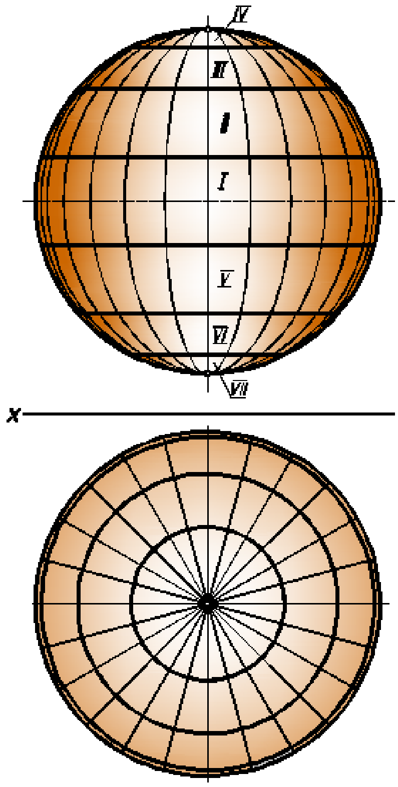


Рис. 267

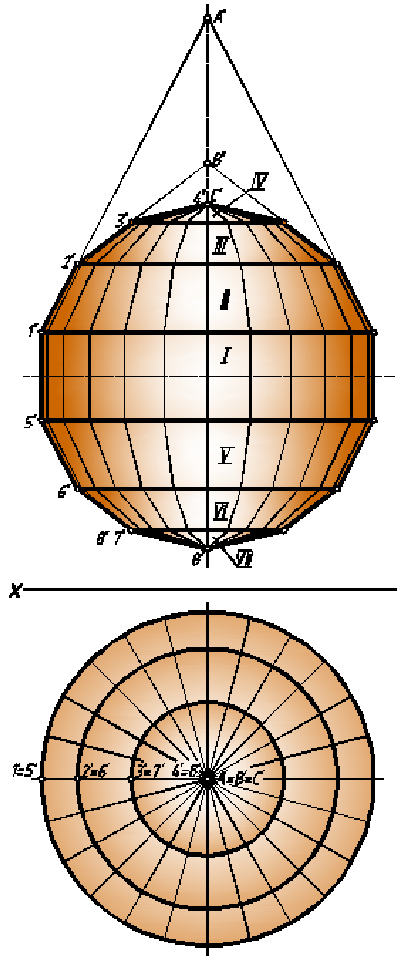


Рис. 268

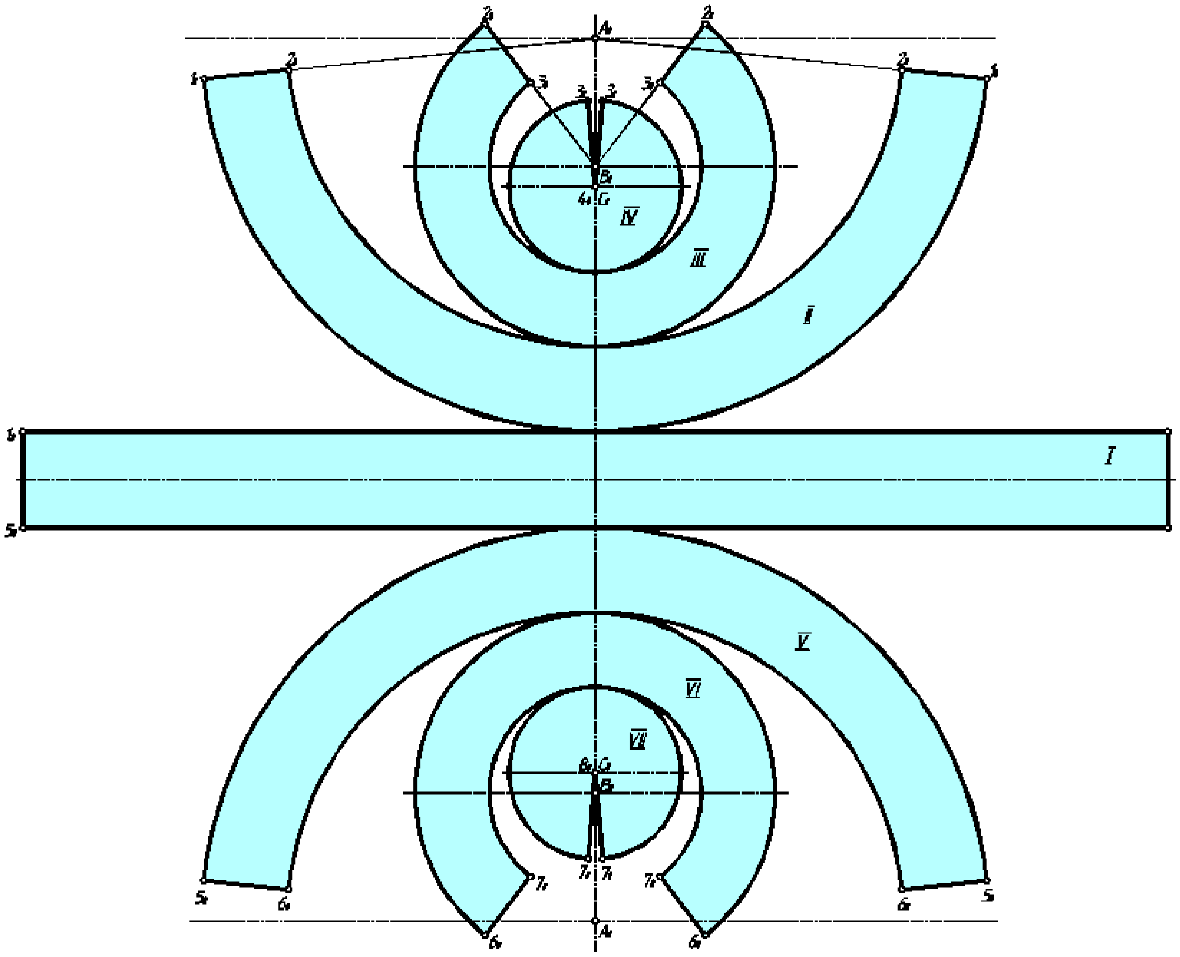


Рис. 269

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Для каких поверхностей строят условные развертки?*
- *В чем суть построения условных разверток?*
- *Какими поверхностями аппроксимируют отсеки сферы при построении ее условной развертки?*

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§48. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Метод ортогонального проецирования на несколько плоскостей проекций, обладая многими достоинствами, имеет существенный недостаток — отсутствие наглядности. Одновременное рассмотрение нескольких изображений затрудняет мысленное воссоздание пространственного образа. Объясняется это тем, что проецируемый предмет — трехмерен, а его проекции — двухмерны. Например, горизонтальная проекция содержит только координаты x и y, фронтальная проекция — координаты x и z, а профильная проекция — координаты y и z. Все три координаты содержат только две взаимосвязанные плоскости проекций. Избежать этого недостатка позволяет способ аксонометрического изображения.

Суть способа аксонометрического изображения состоит в том, что предмет, отнесённый к натуральной (прямоугольной) системе координат Oxyz, вместе с этой системой координат проецируется на некоторую плоскость α таким образом, что ни одна из осей координат не проецируется в точку. Полученное изображение называется **аксонометрической проекцией** или **аксонометрией**. В этом случае на аксонометрическую плоскость проецируются три измерения предмета.

Слово аксонометрия греческого происхождения и состоит из двух слов: аксон (ось) и метрео (измеряю), т.е. перевести его можно, как "измерение по осям".

На рис.270 представлена схема проецирования осей координат на плоскость α в направлении s.

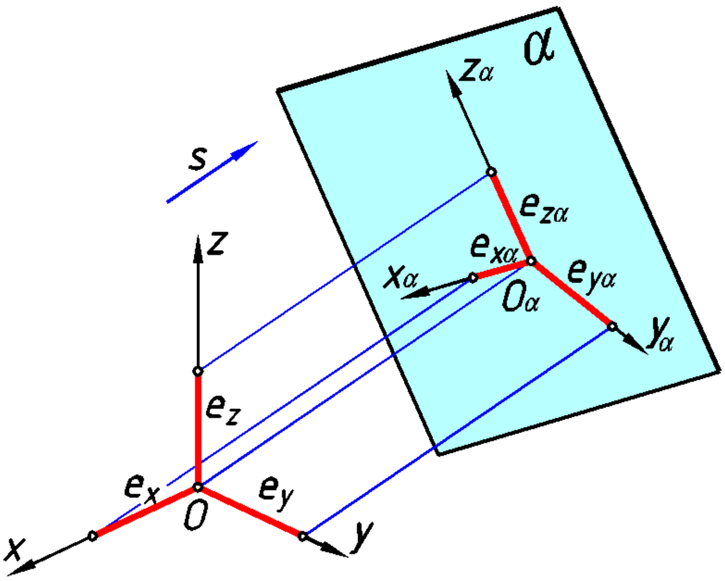


Рис. 270

Плоскость α называется **плоскостью аксонометрических проекций** или **картинной плоскостью**. Оси координат x, y и z проецируются на картинную плоскость в прямые x_α, y_α и z_α, называемые **аксонометрическими осями**.

Если на осях x, y и z отложить равные отрезки e_x, e_y и e_z, то их аксонометрическими проекциями будут отрезки $e_{x\alpha}$, $e_{y\alpha}$ и $e_{z\alpha}$, которые в общем случае не равны между собой и не равны отрезкам e_x, e_y и e_z.

Отношения $k_x = e_{x\alpha} / e_x$, $k_y = e_{y\alpha} / e_y$, $k_z = e_{z\alpha} / e_z$, называются **коэффициентами (показателями) искажения по аксонометрическим осям**. Коэффициенты искажения зависят от угла φ^o наклона направления проецирования s к картинной плоскости. Эта зависимость определяется соотношением [7]

$$k^2_x + k^2_x + k^2_x = 2 + \mathrm{ctg}\, \varphi^o \quad (1)$$

Поскольку расположение координатных осей x, y и z относительно картинной плоскости и направление проецирования не ограничены, то и величина коэффициентов искажения и их отношение между собой также не ограничены.

Если все три показателя искажения не равны между собой, то проекция называется **триметрической**. Если два показателя искажения равны между собой, а третий от них отличается, то проекция называется **диметрической**. Если все три показателя искажения равны между собой, то проекция называется **изометрической**.

Если направление проецирования перпендикулярно картинной плоскости, то аксонометрическая проекция называется **прямоугольной (ортогональной)**, в противном случае — **косоугольной**.

На рис.271 представлено построение точки в пространстве и на аксонометрическом чертеже.

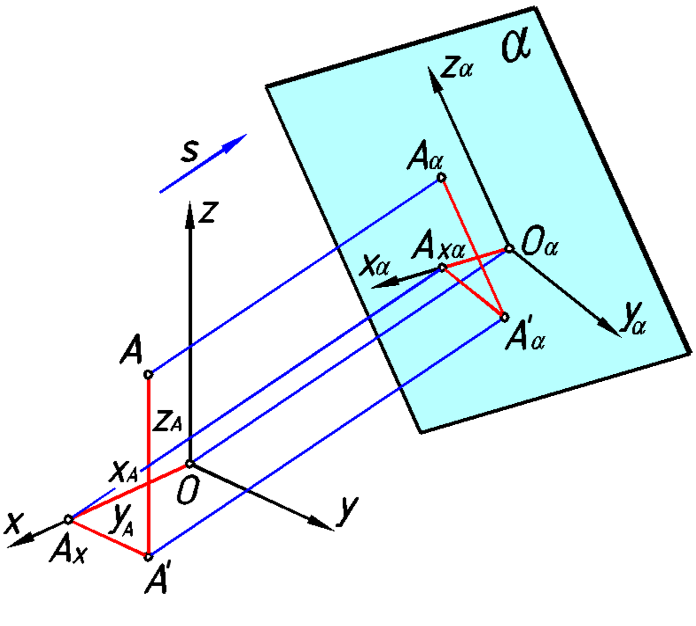


Рис. 271

Пространственной координатной ломаной $O\ A_x\ A'\ A$ на аксонометрическом чертеже соответствует плоская аксонометрическая координатная ломаная $O_\alpha\ A_{x\alpha}\ A'_\alpha\ A_\alpha$, где A_α есть аксонометрическая проекция пространственной точки A. Аксонометрическая проекция любой ортогональной проекции точки называется ее **вторичной** проекцией (на рис.271 точка A'_α есть вторичная проекция горизонтальной проекции A' пространственной точки A).

Если можно построить аксонометрическую проекцию любой точки пространства, значит можно построить аксонометрию любой пространственной фигуры. На рис.272 показано построение аксонометрии призмы с основанием на горизонтальной плоскости проекций.

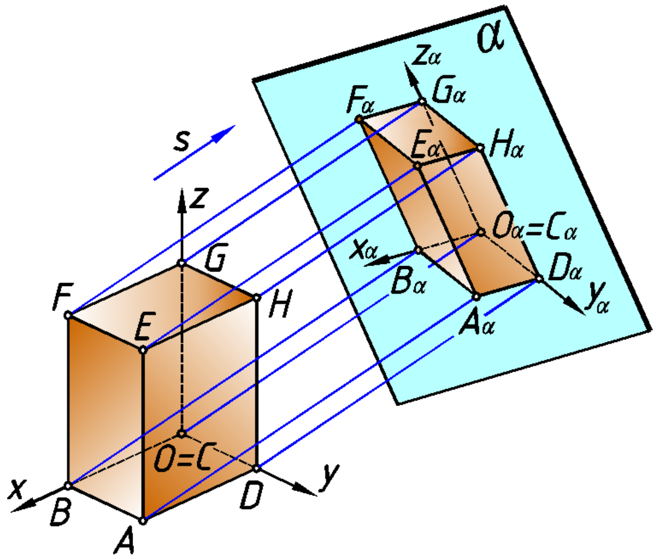


Рис. 272

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *В чем суть аксонометрического способа изображения?*
- *Что называются коэффициентами искажения по аксонометрическим осям?*
- *Как подразделяются аксонометрические проекции в зависимости от коэффициентов искажения?*
- *Как подразделяются аксонометрические проекции в зависимости от направления проецирования?*

§49. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АКСОНОМЕТРИИ

Поскольку взаимное расположение декартовой системы координат относительно картинной плоскости, а также направление проецирования, может быть любым, то очевидно, можно получить бесконечное множество аксонометрических проекций, которые будут отличаться друг от друга и направлением аксонометрических осей, и коэффициентами искажения вдоль этих осей.

В 1860 году немецкий ученый Карл Польке сформулировал теорему, которая утверждает: **"Три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, могут быть приняты за параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на осях прямоугольной системы координат от ее начала".**

Эта теорема является основной теоремой аксонометрии.

На основании этой теоремы аксонометрические оси и коэффициенты искажения по ним могут выбираться совершенно произвольно.

На практике число применяемых аксонометрических проекций ограничено. Например, ГОСТ 2.317-69 рекомендует применять две прямоугольные (изометрическую и диметрическую) и три косоугольные (две из которых — изометрические и одна — диметрическая) проекции.

Вопросы для самопроверки

➢ *Сформулируйте основную теорему аксонометрии.*

§50. КОЭФФИЦИЕНТЫ ИСКАЖЕНИЯ ПО АКСОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОСЯМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

В системе трех плоскостей проекций возьмем плоскость общего положения $\boldsymbol{\alpha}$ и примем ее за плоскость аксонометрических проекций (рис.273).

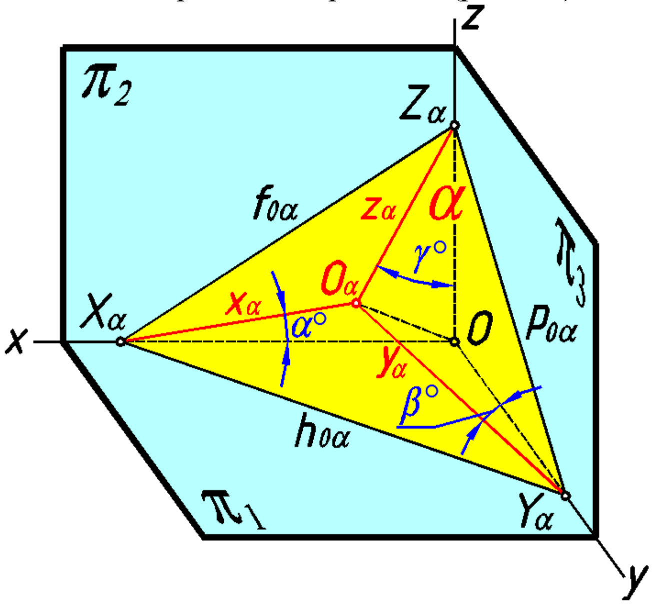


Рис. 273

Следы этой плоскости $\boldsymbol{h_{0\alpha}}$, $\boldsymbol{f_{0\alpha}}$, $\boldsymbol{p_{0\alpha}}$ образуют треугольник $\boldsymbol{X_\alpha\ Y_\alpha\ Z_\alpha}$ с вершинами в точках схода следов. Этот треугольник называют **треугольником следов**.

Опустим из начала координат $\boldsymbol{O}$ перпендикуляр на плоскость $\boldsymbol{\alpha}$. Точка $\boldsymbol{O_\alpha}$ пересечения перпендикуляра с плоскостью α представляет собой прямоугольную проекцию точки $\boldsymbol{O}$, а отрезки $\boldsymbol{O_\alpha X_\alpha}$, $\boldsymbol{O_\alpha Y_\alpha}$, $\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha}$ — прямоугольные аксонометрические проекции координатных осей $\boldsymbol{OX_\alpha}$, $\boldsymbol{OY_\alpha}$, $\boldsymbol{OZ_\alpha}$.

Аксонометрические оси перпендикулярны сторонам треугольника следов: $\boldsymbol{O_\alpha X_\alpha \perp Y_\alpha Z_\alpha}$, $\boldsymbol{O_\alpha Y_\alpha \perp X_\alpha Z_\alpha}$, $\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha \perp X_\alpha Y_\alpha}$. Это легко доказать с помощью теоремы о трех перпендикулярах. Докажем, например, что $\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha \perp X_\alpha Y_\alpha}$. Поскольку ось $\boldsymbol{OZ}$ перпендикулярна плоскости $\boldsymbol{\pi_1}$, то она перпендикулярна отрезку $\boldsymbol{X_\alpha Y_\alpha}$, лежащему в этой плоскости. Отрезок $\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha}$ является ортогональной проекцией отрезка $\boldsymbol{OZ_\alpha}$ на плоскость $\boldsymbol{\alpha}$, следовательно $\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha \perp X_\alpha Y_\alpha}$, что и требовалось доказать.

Треугольники $\boldsymbol{OO_\alpha X_\alpha}$, $\boldsymbol{OO_\alpha Y_\alpha}$, $\boldsymbol{OO_\alpha Z_\alpha}$ — прямоугольные, отрезки $\boldsymbol{O_\alpha X_\alpha}$, $\boldsymbol{O_\alpha Y_\alpha}$, $\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha}$ являются их катетами, а отрезки $\boldsymbol{OX_\alpha}$, $\boldsymbol{OY_\alpha}$, $\boldsymbol{OZ_\alpha}$ — гипотенузами. Отсюда —

$$O_\alpha X_\alpha / OX_\alpha = \cos\alpha^o,\ O_\alpha Y_\alpha / OY_\alpha = \cos\beta^o,\ O_\alpha Z_\alpha / OZ_\alpha = \cos\gamma^o,$$

где $\boldsymbol{\alpha^o}$, $\boldsymbol{\beta^o}$, $\boldsymbol{\gamma^o}$ — углы наклона координатных осей $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ к плоскости аксонометрических проекций.

Так как

$$O_\alpha X_\alpha / OX_\alpha = k_x,\ O_\alpha X_\alpha / OX_\alpha = k_y,\ O_\alpha X_\alpha / OX_\alpha = k_z$$

то

$$k_x = \cos\alpha^o,\ k_y = \cos\beta^o,\ k_z = \cos\gamma^o \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что в прямоугольной аксонометрии коэффициенты искажения связаны зависимостью

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 \qquad (2)$$

Изометрическая проекция

В прямоугольной изометрии $k_x = k_y = k_z = k$, следовательно, $3k^2 = 2$ *и* $k = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82$, т.е. коэффициенты искажения по всем трем аксонометрическим осям равны **0,82**.

В практической изометрии коэффициенты искажения принимают равными ***1***, в связи с чем, линейные размеры изображений увеличиваются в отношении 1:0,82, т.е. в ***1,22*** раза.

Диметрическая проекция

В прямоугольной диметрии $k_x = k_z = k$ и $k_y = 0{,}5\,k$, следовательно, $2k^2 + k^2/4 = 2$, $k^2 = 8/9$, $k = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}94$. Таким образом, в прямоугольной диметрии коэффициенты искажения $k_x = k_z = 0{,}94$, и $k_y = 0{,}47$.

В практической диметрии коэффициенты искажения $k_x = k_z = 1$ и $k_y = 0{,}5$, в связи с чем, линейные размеры изображений увеличиваются в отношении 1: 0,94, т.е в ***1,06*** раза.

Вопросы для самопроверки

- *Чему равны коэффициенты искажения в прямоугольной изометрии?*
- *Чему равны коэффициенты искажения в прямоугольной диметрии?*
- *Какая аксонометрия называется практической?*
- *Чему равен масштаб практической изометрии?*
- *Чему равен масштаб практической диметрии?*

§51. УГЛЫ МЕЖДУ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ОСЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

Как было доказано выше, в прямоугольной аксонометрии оси являются высотами треугольника следов, а точка O_a — точкой их пересечения (ортоцентром). Используем этот факт для определения углов между аксонометрическими осями.

Изометрическая проекция

Так как в изометрической проекции коэффициенты искажения по осям одинаковы, то треугольник следов (рис.273) — равносторонний. Следовательно, углы между аксонометрическими осями равны **120°** (рис.274).

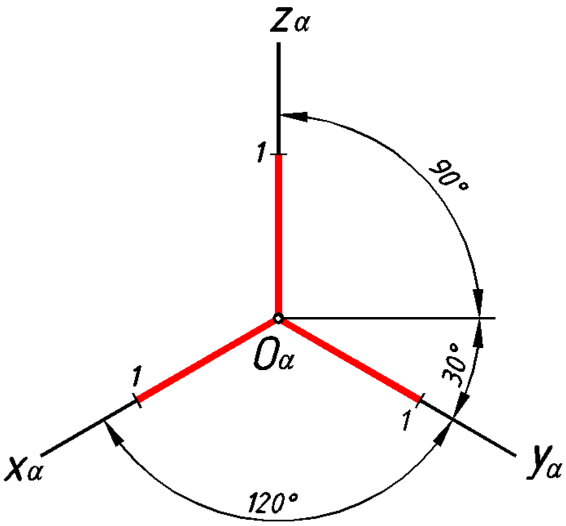


Рис. 274

Диметрическая проекция

Поскольку в диметрии коэффициенты искажения по осям $\boldsymbol{x_o}$ и z_o одинаковы, а по оси $\boldsymbol{y_o}$ вдвое меньше, треугольник следов — равнобедренный (рис.275). Основание $\boldsymbol{C_\alpha}$ высоты этого треугольника является серединой его стороны $\boldsymbol{X_\alpha Z_\alpha}$

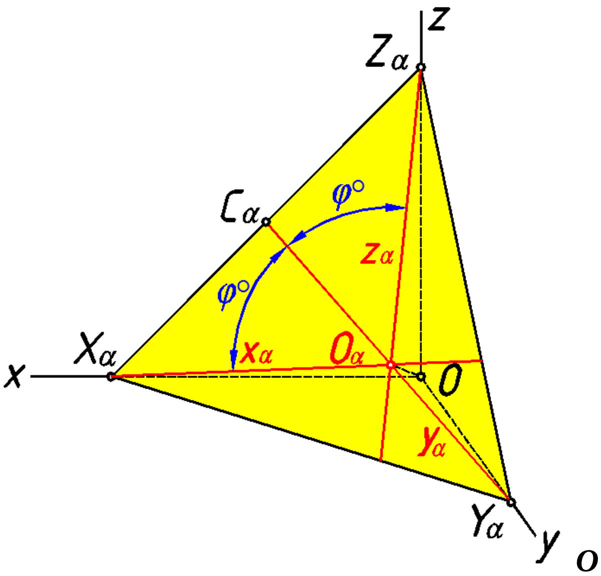


Рис. 275

Из $\Delta\, \boldsymbol{X_\alpha O Z_\alpha}$: $(\boldsymbol{X_\alpha Z_\alpha})^2 = (\boldsymbol{OX_\alpha})^2 + (\boldsymbol{OZ_\alpha})^2$, откуда $(\boldsymbol{X_\alpha Z_\alpha}) = (\boldsymbol{OZ_\alpha})\sqrt{2}$ и $(\boldsymbol{C_\alpha Z_\alpha}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{OZ_\alpha})$

Из $\Delta\, \boldsymbol{Z_\alpha O_\alpha C_\alpha}$: $\boldsymbol{sin\varphi^o = (C_\alpha Z_\alpha) / (O_\alpha Z_\alpha)} = (\boldsymbol{C_\alpha Z_\alpha}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{OZ_\alpha}) / (\boldsymbol{O_\alpha Z_\alpha}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \;/\; \boldsymbol{k_z}.$

Так как в прямоугольной диметрии $\boldsymbol{k} = \sqrt{\frac{8}{9}}$ = **0,94,** получим $\boldsymbol{sin\varphi^o} = \boldsymbol{0{,}75}$, что соответствует углу $\boldsymbol{\varphi^o}$ = **48°35'**.

Следовательно, угол между аксонометрическими осями $\boldsymbol{x_\alpha}$ и z_α равен **97°10'**.

Если ось z_α расположить вертикально, то расположение аксонометрических оси $\boldsymbol{x_\alpha}$ и $\boldsymbol{y_\alpha}$ будет таким, как показано на рис.276.

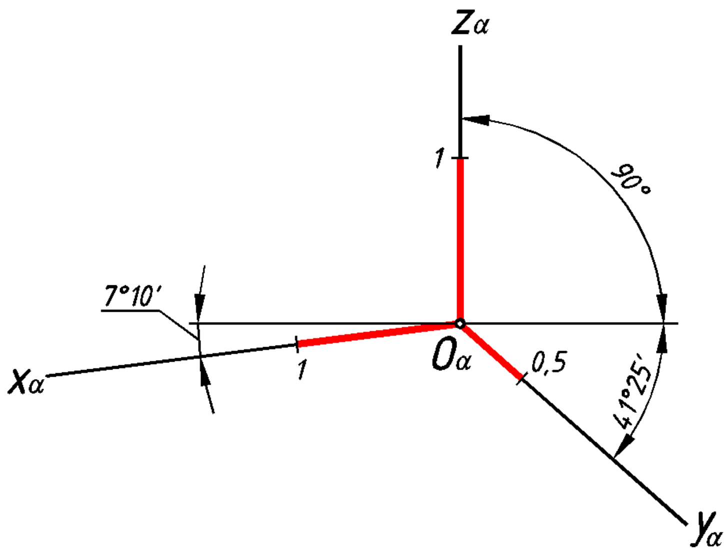


Рис. 276

Поскольку $tg7^o10' \approx 1/8$, ось x_α строят как гипотенузу прямоугольного треугольника с горизонтальным катетом, равным ***8*** произвольным единицам, и вертикальным катетом равным ***1*** единице. Ось y_α строят как биссектрису угла между осями x_α и z_α. Построение показано на рис.277.

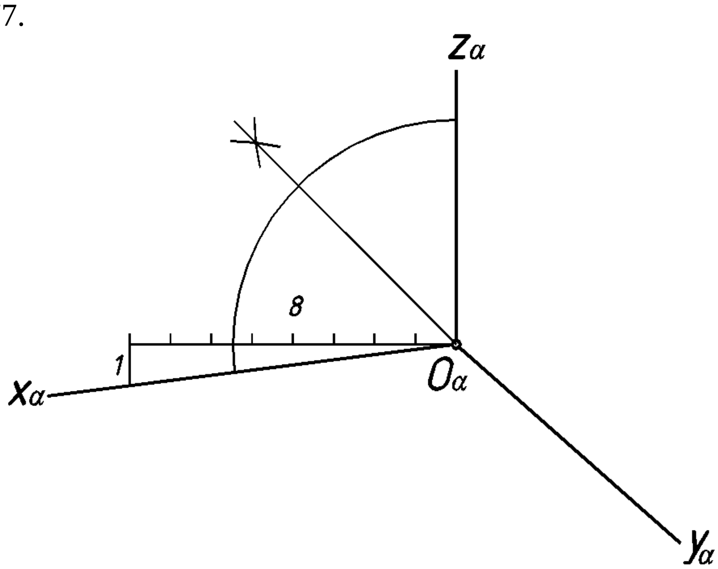


Рис. 277

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Как располагаются аксонометрические оси в прямоугольной изометрии?*
- *Как располагаются аксонометрические оси в прямоугольной диметрии?*

§52. ПРОЕКЦИИ ОКРУЖНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

Известно, что прямоугольной проекцией окружности, расположенной в плоскости, наклоненной к плоскости проекций, является эллипс. Большая ось этого эллипса — проекция диаметра окружности, параллельного плоскости проекций. Малая ось эллипса — проекция диаметра окружности, совпадающего с линией наибольшего наклона плоскости окружности к плоскости проекций (рис.278).

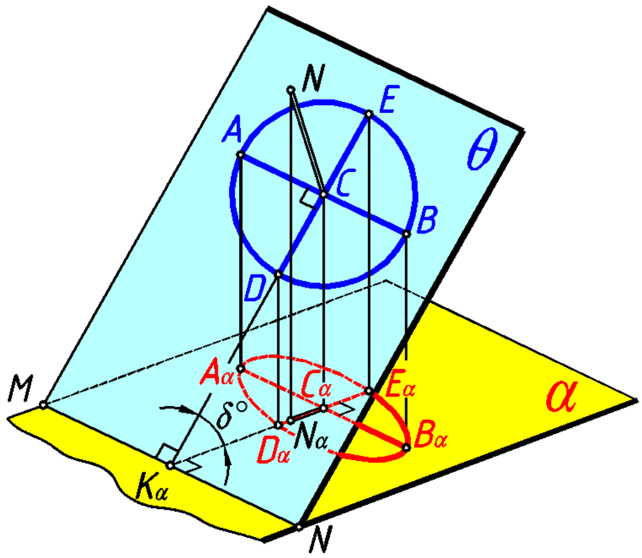


Рис. 278

Проекция перпендикуляра к плоскости окружности совпадает с проекцией малой оси эллипса и перпендикулярна к большой оси эллипса.

Величина малой оси эллипса зависит от угла наклона плоскости окружности к плоскости проекций и определяется как $|\boldsymbol{D_\alpha E_\alpha}| = |\boldsymbol{DE}| \cos \boldsymbol{\delta^o}$.

Найдем размер малой оси эллипса для изометрической проекции окружности.

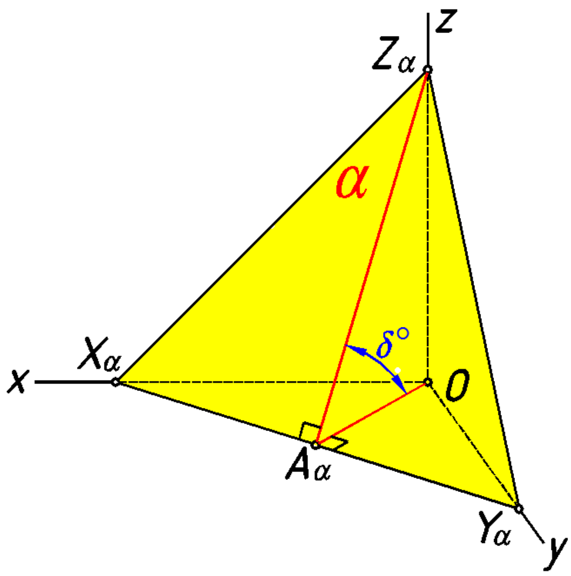


Рис. 279

Представленный на рис.279 треугольник следов в прямоугольной изометрии — равносторонний, следовательно, линия наибольшего наклона $Z_\alpha A_\alpha$ является его биссектрисой. Точка A_α — середина стороны $X_\alpha Y_\alpha$.

Примем $OX_\alpha = OY_\alpha = OZ_\alpha = a$. В прямоугольном треугольнике $X_\alpha OY_\alpha$ гипотенуза $X_\alpha Y_\alpha = a\sqrt{2}$. Высота $Z_\alpha A_\alpha$ треугольника $X_\alpha Z_\alpha Y_\alpha$ равна $Z_\alpha A_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}|X_\alpha Y_\alpha|$. Подставив в последнее выражение $X_\alpha Y_\alpha = a\sqrt{2}$, получим $Z_\alpha A_\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. Высота OA_α прямоугольного равнобедренного треугольника $X_\alpha OY_\alpha$ равна $|OA_\alpha| = \frac{1}{2}|X_\alpha Y_\alpha| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вычислим, теперь $\cos\delta^o = |OA_\alpha| / |Z_\alpha A_\alpha| = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cong 0{,}58$

Таким образом, малая ось эллипса в прямоугольной изометрии равна ***0,58d***, где d — диаметр проецируемой окружности.

Если коэффициенты искажения принять равными ***1***, то проекцией окружности диаметром d будет эллипс с большой осью, равной ***1,22d***, и малой осью, равной ***0,71d***.

На рис.280 показаны проекции окружности диаметра d на плоскостях проекций в прямоугольной изометрии. Все эллипсы конгруэнтны. Большие оси эллипсов перпендикулярны осям, отсутствующим на плоскости проекций, а малые оси параллельны этим осям.

На рис.281 представлен изометрический чертеж пространственной фигуры в форме куба с цилиндрическими выступами на его гранях.

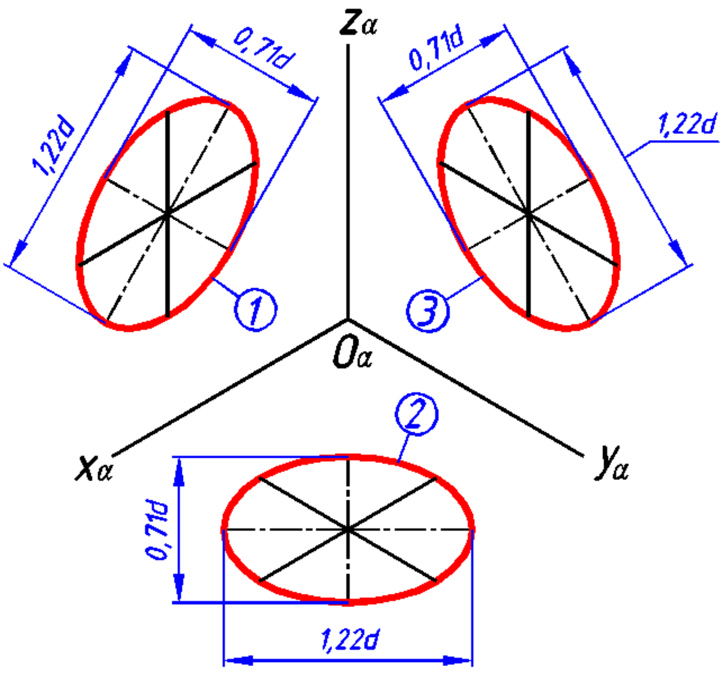


Рис. 280

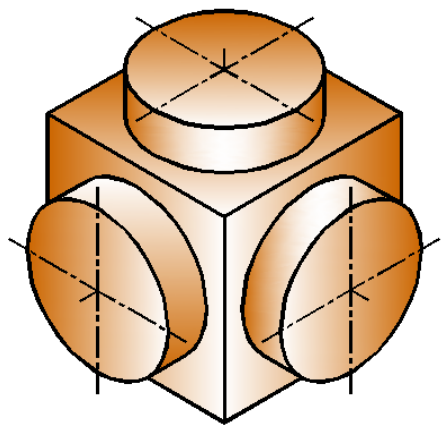
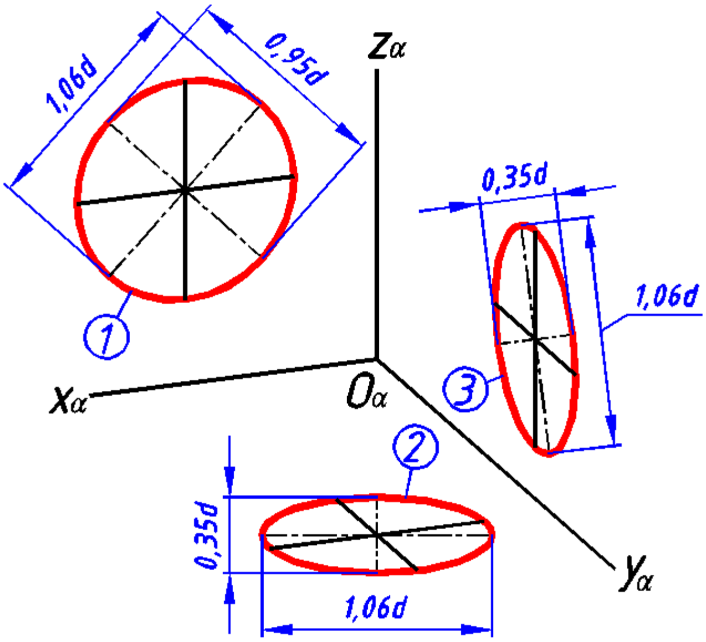


Рис. 281

В прямоугольной диметрической проекции окружности проецируются так, как показано на рис.282.

На рис.283 представлена прямоугольная диметрическая проекция той же фигуры, что и на рис.281.



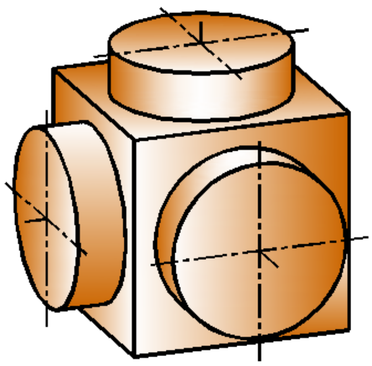


Рис. 282 Рис. 283

Построение эллипса по двум осям рассматривалось выше (см. рис.125).

Вопросы для самопроверки

- *Чему равны оси эллипсов в практической изометрии?*
- *Чему равны оси эллипсов в практической диметрии?*
- *Как располагаются большие и малые оси эллипсов в прямоугольной аксонометрии?*

§54. КОСОУГОЛЬНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В соответствии с ГОСТ 2.317-69 установлены правила построения следующих трех косоугольных аксонометрических проекций: фронтальной изометрической, горизонтальной изометрической и фронтальной диметрической.

54.1. Фронтальная изометрическая проекция

Положение аксонометрических осей приведено на рис.284. Допускается применять аксонометрию с углом наклона оси y_α, равным 30° и 60°.

Выполнять проекцию рекомендуется без искажения по осям x_α, y_α и z_α.

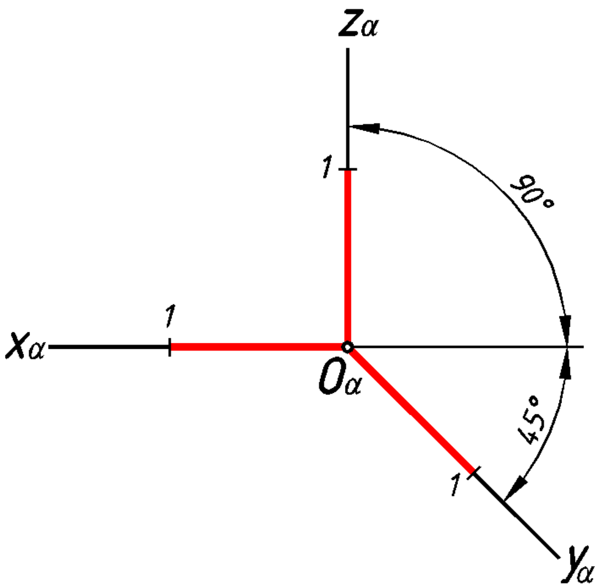


Рис.284

Проекции окружностей во фронтальной изометрической проекции показаны на рис.285.

Окружности ,лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость в окружность ***1***. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций проецируются в конгруэнтные эллипсы ***2*** и ***3***. Большая ось эллипса ***2*** наклонена к оси x_α под углом ***22º30'***. Большая ось эллипса ***3*** наклонена к оси z_α под углом ***22º30'***.

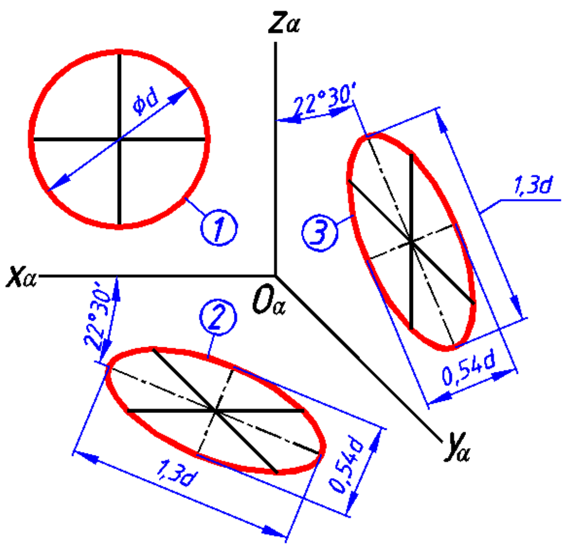


Рис.285

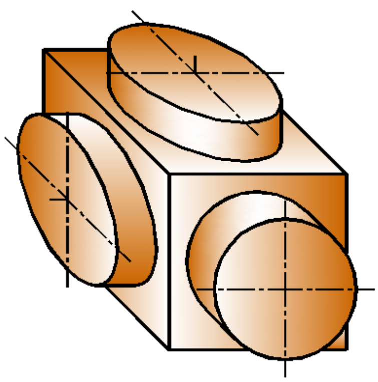


Рис.286

Большие оси эллипсов ***2*** и ***3*** равны ***1,3d,*** а малые - ***0,54d*** .

Пример фронтальной изометрической проекции детали приведен на рис.286.

Очевидно, что такую проекцию удобно применять тогда, когда большинство окружностей на изображаемой детали находится на плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций.

54.2. Горизонтальная изометрическая проекция

Положение аксонометрических осей горизонтальной изометрической проекции приведено на рис.287. Допускается применять аксонометрию с углом наклона оси y_α , равным 45° и 60°, сохраняя угол между осями x_α и y_α равным 90°.

Выполняют проекцию без искажения по осям x_α , y_α и z_α .

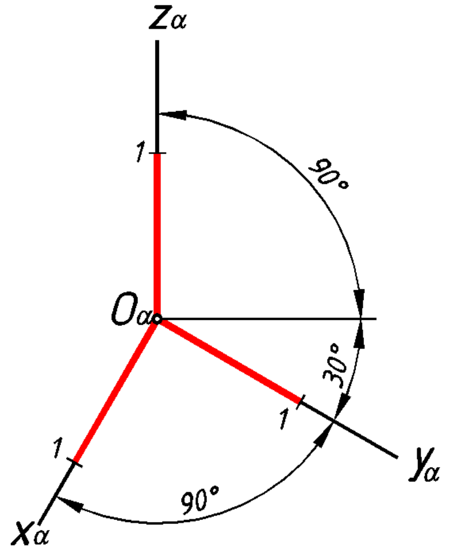


Рис.287

Проекции окружностей в горизонтальной изометрической проекции показаны на рис.288.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость в окружности ***2***. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной и профильной плоскостям проекций проецируются в эллипсы ***1*** и ***3***. Большая ось эллипса ***1*** наклонена к оси z_α под углом ***15°***. Большая ось эллипса ***3*** наклонена к оси z_α под углом ***30°***.

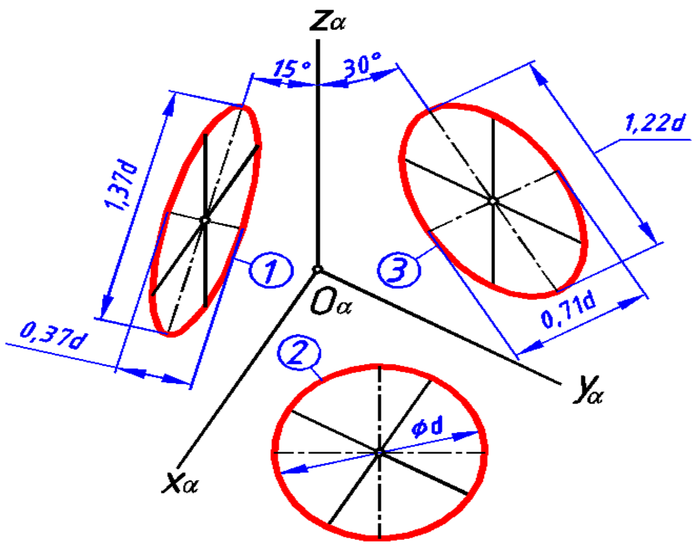


Рис.288

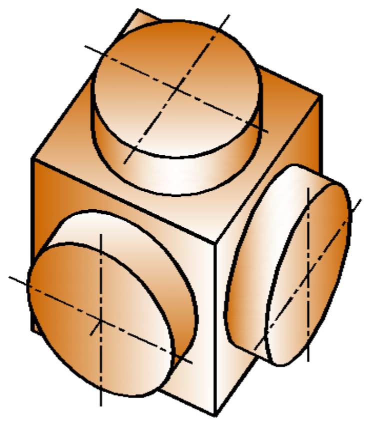


Рис.289

Большая оси эллипса ***1*** равна ***1,37d*** , а малая - ***0,37d*** .

Большая оси эллипса ***3*** равна ***1,22d*** , а малая - ***0,71d*** .

Пример горизонтальной изометрической проекции детали приведен на рис.289.

Очевидно, что такую проекцию удобно применять тогда, когда большинство окружностей на изображаемой детали находится на плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций.

54.3. Фронтальная диметрическая проекция

Положение аксонометрических осей горизонтальной изометрической проекции представлено на рис.290. Допускается применять аксонометрию с углом наклона оси y_α , равным 30^o и 60^o.

Коэффициенты искажения по осям x_α и z_α равны ***1***, а по оси y_α - ***0,5*** .

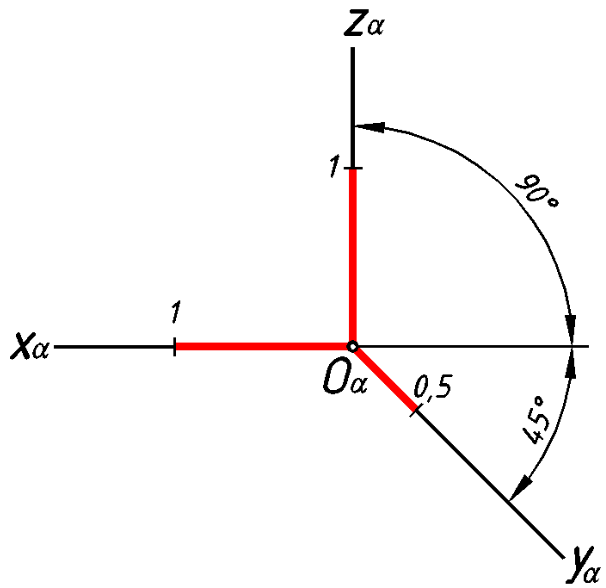


Рис.290

Проекции окружностей во фронтальной диметрической проекции показаны на рис.291.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются на аксонометрическую плоскость в окружности ***1***. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций проецируются в конгруэнтные эллипсы ***2*** и ***3***. Большая ось эллипса ***2*** наклонена к оси x_α под углом $7^o14'$. Большая ось эллипса ***3*** наклонена к оси z_α под углом $7^o14'$.

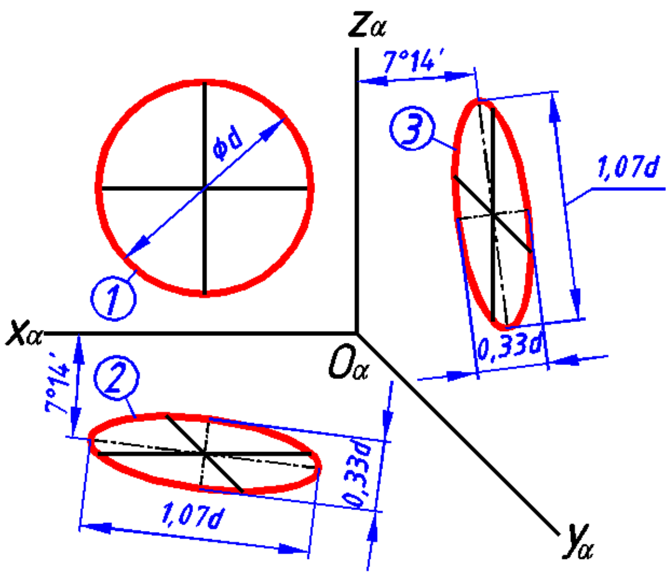


Рис.291

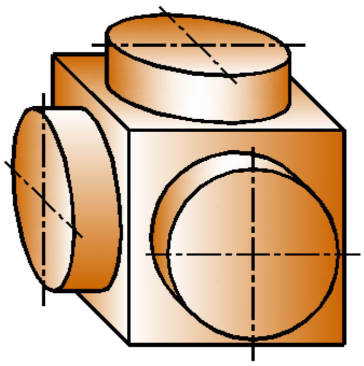


Рис.292

Большие оси эллипсов ***2*** и 3 равны ***1,07d***, а малые - ***0,33d*** .
Пример фронтальной диметрической проекции детали приведен на рис.292.
Очевидно, что такую проекцию удобно применять тогда, когда большинство окружностей на изображаемой детали находится на плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций.
В заключении следует отметить следующее. С развитием компьютерных технологий построение аксонометрических проекций значительно упростилось. Современные графические программы позволяют создавать электронные модели трехмерных объектов и рассматривать их на экране дисплея с различных точек зрения. Любое изображение объекта на экране дисплея, по сути, является аксонометрической проекцией этого объекта. Чтобы получить аксонометрический чертеж достаточно просто распечатать экранное изображение объекта на принтере или плоттере в требуемом масштабе.
ГОСТ 2.317-69 разрешает такой способ получения аксонометрических проекций.
На рис.293 представлен аксонометрический чертеж детали, выполненный в программе Autodesk Inventor.

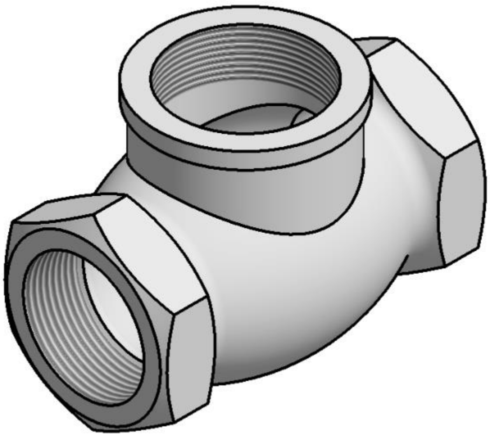


Рис.293

<u>Вопросы для самопроверки</u>

- *Какие косоугольные проекции рекомендует применять ГОСТ 2.317-69?*

Библиографический список

Рекомендуемая учебная литература

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский В.А. Курс начертательной геометрии. М.: Высшая школа, 1998.
2. Фролов С.А. Начертательная геометрия. М.: ИНФРА-М, 2007.
3. Четверухин Н.Ф. и др. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1963.

Дополнительная литература

4. Бубенников А.В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1973.
5. Винницкий И.Г. Начертательная геометрия. М.: Высшая школа, 1975.
6. Глазунов Е.А. О проекции линии пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. М.: Советская наука,1958.
7. Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф. Аксонометрия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
8. Иванов Г.С., Начертательная геометрия: учебник. – 3-е изд. – М.: ФГБОУ ВПО МГУЛ, 2012. – 340 с.
9. Локтев О.В., Глазунова И. М. Краткий курс начертательной геометрии. М.: Высшая школа, 1975.
10. Мир математики: в 40 т. Т.23: Клауди Альсина. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники. / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
11. Нартова Л.Г., Начертательная геометрия: учебник для студ. учреждений ВПО/ Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – 3-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 192 с. – (Серия Бакалавриат).
12. Шарикян Ю.Э., Гусев В.И., Чекунов Ю.И. Лекции по начертательной геометрии, МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007.

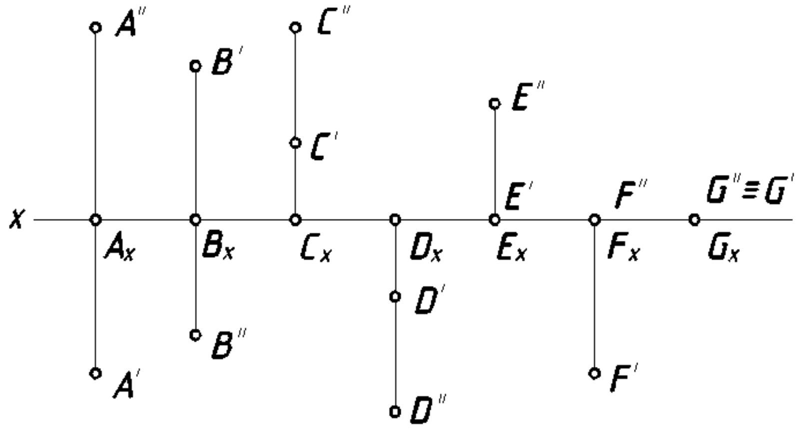
Приложение

ЗАДАЧИ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Проецирование точки

1. Определить расположение заданных точек относительно плоскостей проекций.

Данные (четверть пространства, плоскость или ось проекций и координаты точек) занести в таблицу.



Точка	Располож.	y	z
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			

2. Построить проекции точек **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** и **G** при условии, что:

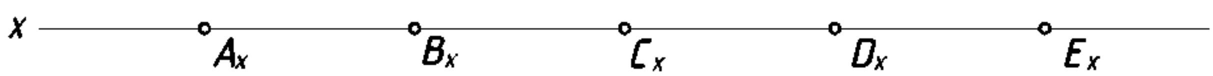
— точка **A** расположена над горизонтальной плоскостью проекций на расстоянии 25 мм и за фронтальной плоскостью на расстоянии 15 мм;

— точка **B** расположена под горизонтальной плоскостью проекций на расстоянии 10 мм и за фронтальной плоскостью на расстоянии 20 мм;

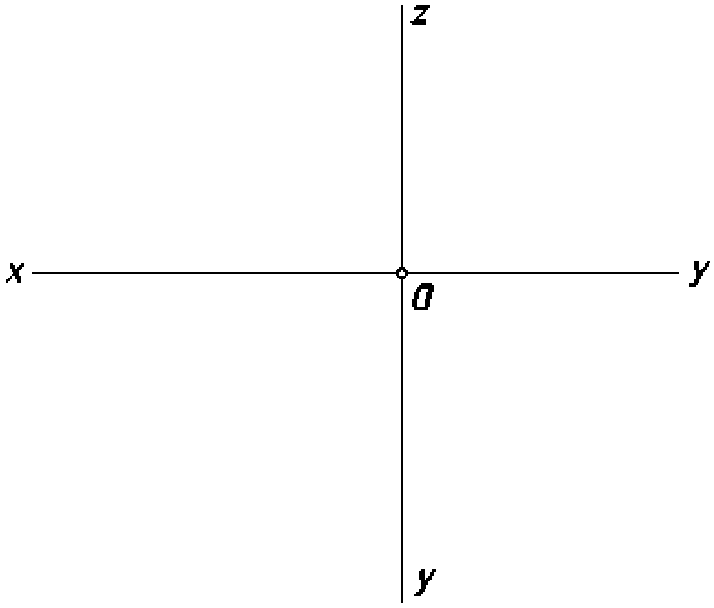
— точка **C** расположена под горизонтальной плоскостью проекций на расстоянии 15 мм и перед фронтальной плоскостью на расстоянии 15 мм;

— точка **D** расположена на фронтальной плоскости проекций на 20 мм выше горизонтальной плоскости проекций ;

— точка **E** расположена на оси проекций **x**.



3. Построить три проекции точек **A**, **B**, **C**, **D**, **E** и **F** по координатам, заданным в таблице. Определить положение точек в пространстве относительно плоскостей проекций и записать в таблицу номер октанта, плоскость или ось проекций.



Точка	x	y	z	Располож.
A	25	15	10	
B	35	-20	30	
C	-30	-15	-25	
D	45	25	-35	
E	15	15	0	
F	0	20	0	

4. Построить профильные проекции точек **A**, **B**, **C**, **D** ,**E** ,**F**. Определить какие точки расположены:

выше плоскости π_1 ___________________

ниже плоскости π_1___________________

перед плоскостью π_2 _________________

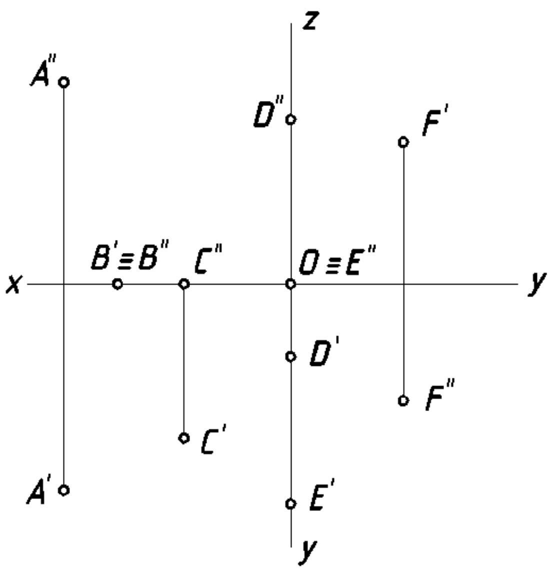
за плоскостью π_2 ____________________

слева от плоскости π_3________________

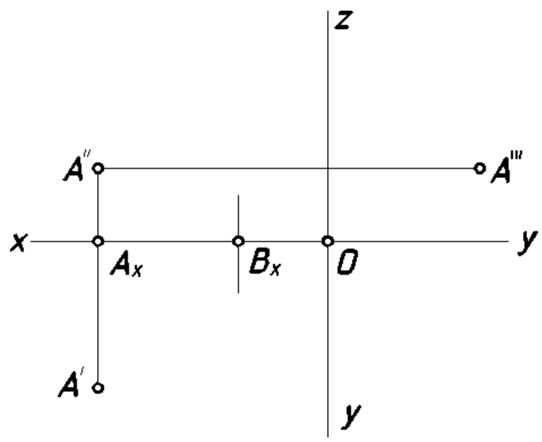
справа от плоскости π_3_______________

на плоскостях проекций______________

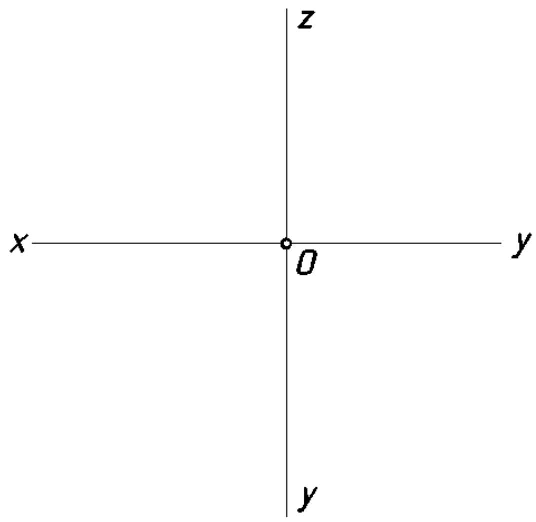
на осях координат___________________



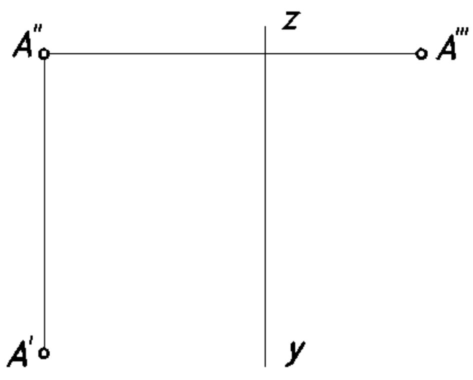
5. Построить проекции точки **B**, расположенной на 15 мм выше от плоскости π_1 и на 10 мм ближе к плоскости π_2 , чем точка **A**.



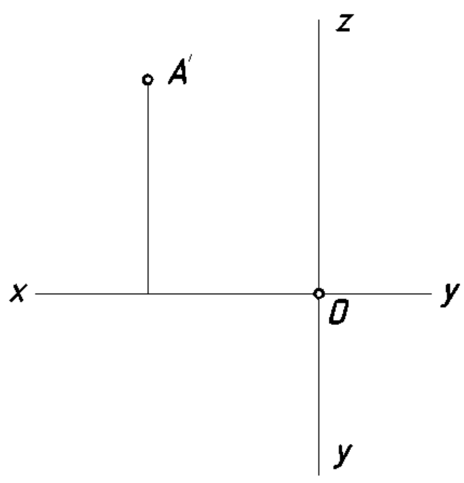
6. Построить проекции точки B, симметричной точке **A**(15, 25, 30) относительно горизонтальной плоскости проекций, и точки **C**, симметричной точке **A** относительно начала координат.



7. Найти положение оси проекций **x**.

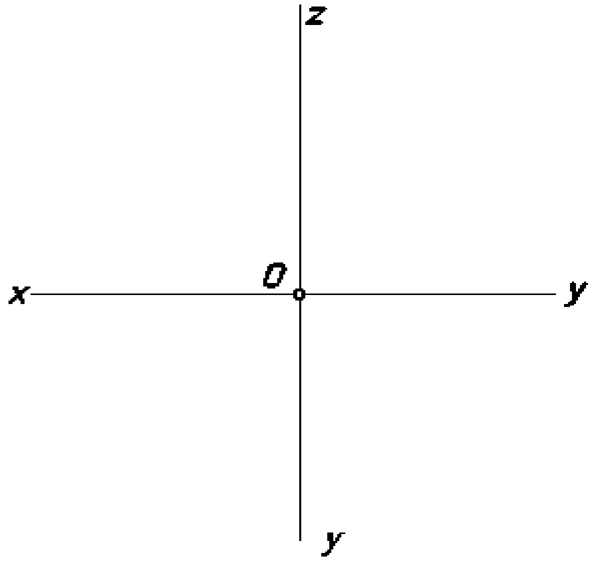


8. Построить недостающие проекции точки **A**, расположенной в третьем октанте, если отношение её координат | **x** | : | **z** | =2.

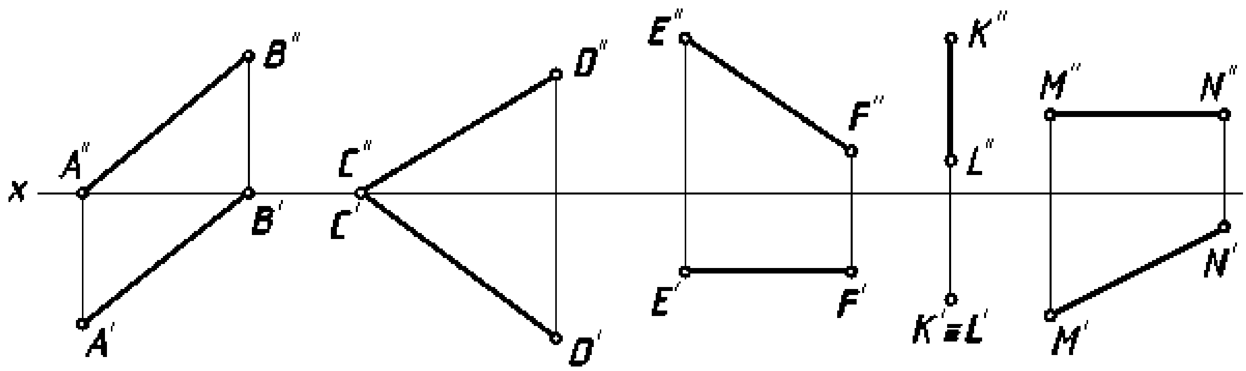


Проецирование прямой. Взаимное положение прямых

9. Построить проекции треугольника **ABC** по координатам его вершин: **A**(25, 30, 30), **B**(0, 5, 30), **C**(25, 5, 0). Охарактеризовать положение сторон треугольника относительно плоскостей проекций, определить их длину и углы наклона к плоскостям проекций.

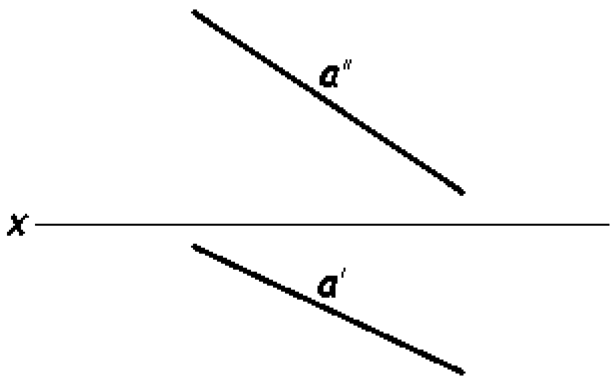


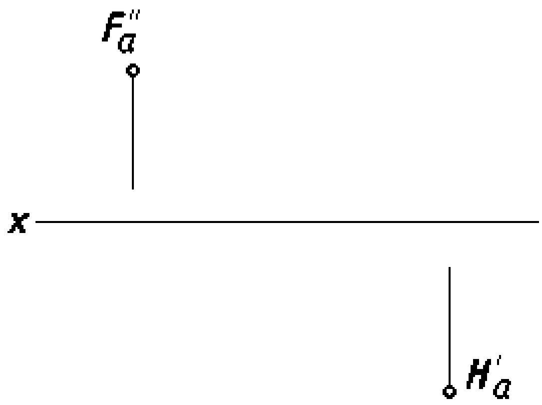
10. Определить положение заданных отрезков относительно плоскостей проекций. Найти следы прямых, которым принадлежат эти отрезки.



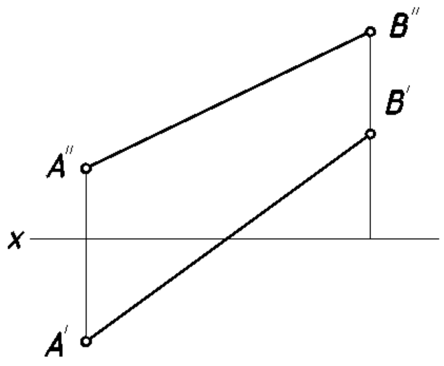
11. Построить проекции следов прямой **a**. Найти проекции точки **A**, которая делит отрезок прямой между её следами в отношении 1:3.

12. Построить проекции прямой a по заданным проекциям ее следов. Определить через какие четверти пространства проходит прямая. Определить длину отрезка прямой между следами.

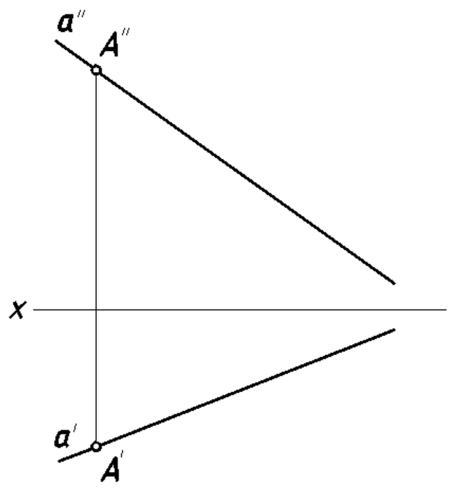




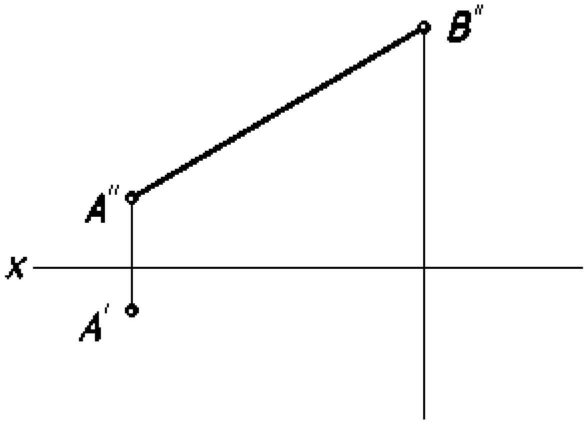
13. Определить длину отрезка **AB** и углы наклона его к плоскостям проекций.



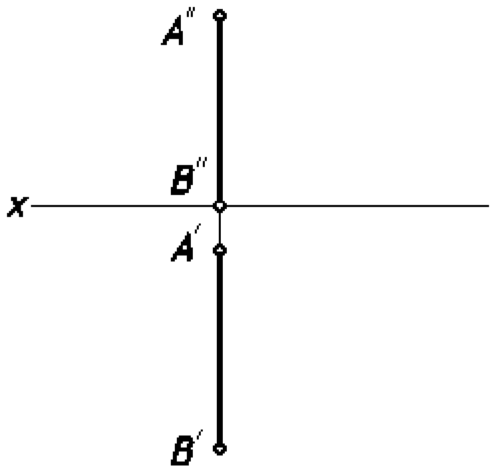
14. Отложить на прямой **a** отрезок **AB** длиной 40 мм.



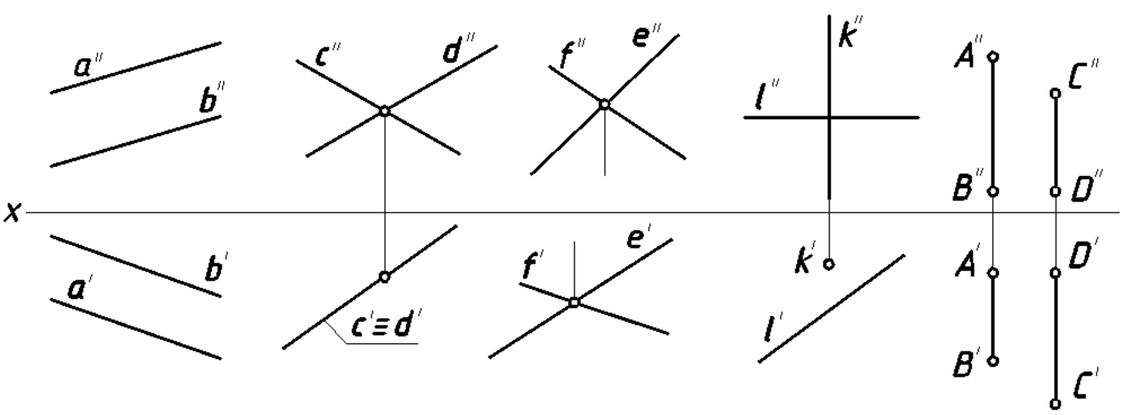
15. Построить горизонтальную проекцию отрезка **AB**, если угол наклона его к фронтальной плоскости проекций равен 30^{O}.



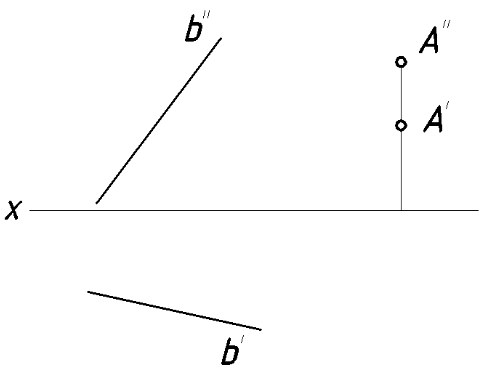
16. Построить проекции точки **C**, принадлежащей отрезку **AB** и удаленной от горизонтальной плоскости проекций на 10 мм. Определить длину отрезка **AC**.



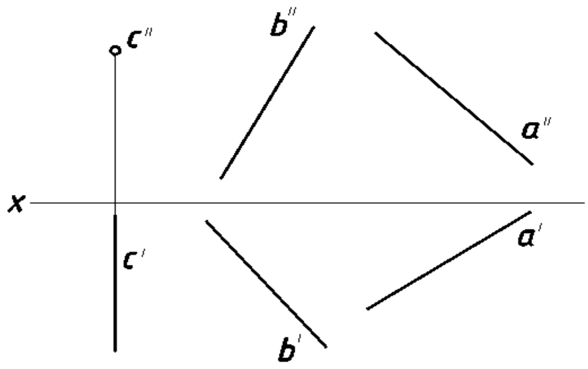
17. Определить взаимное положение заданных прямых.



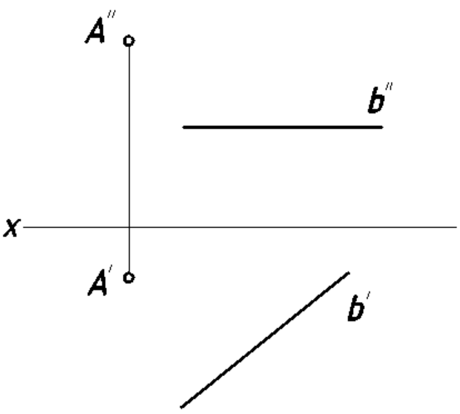
18. Построить проекции горизонтальной прямой, проходящей через точку **A** и пересекающей прямую **b**.



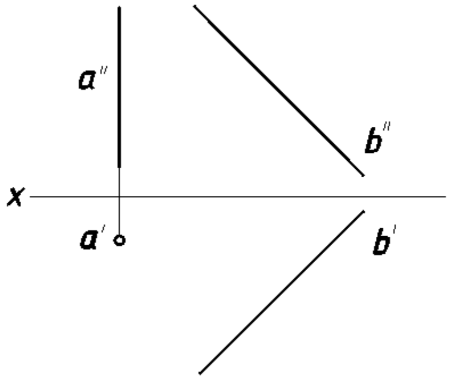
19. Построить проекции прямой **d**, параллельной прямой **a** и пересекающей прямые **b** и **c**.



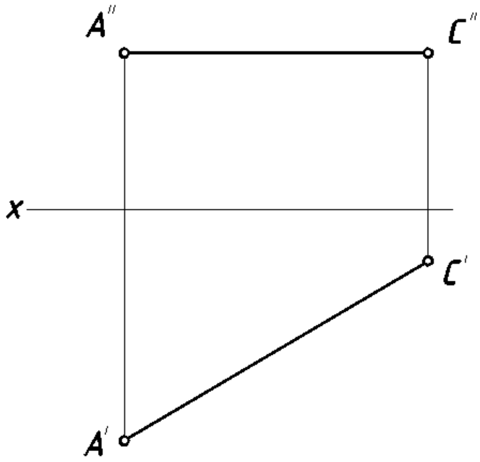
20. Построить проекции прямой **c,** проходящей через точку **A** и пересекающей прямую **b** под углом 90^{O}.



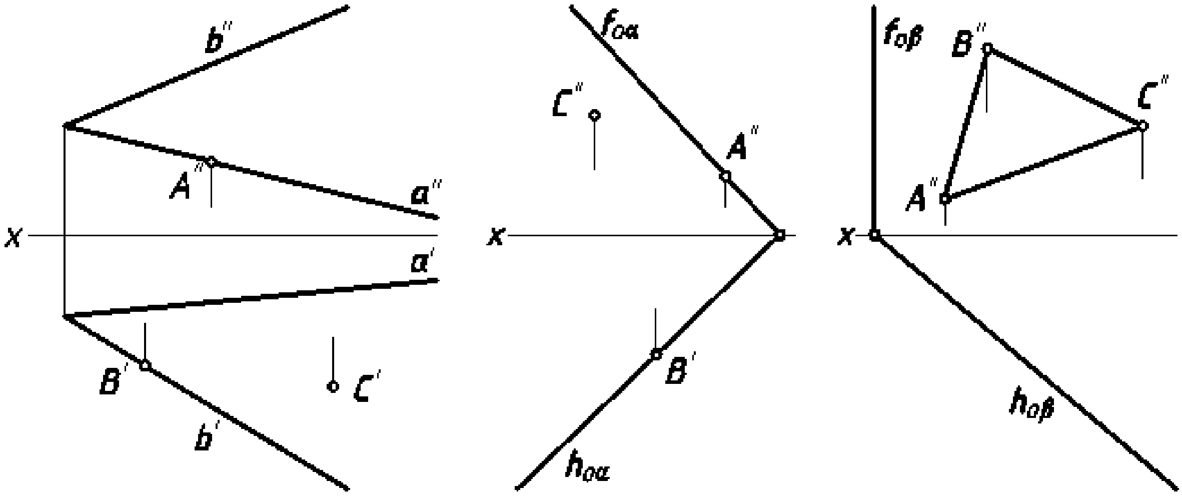
21. Построить проекции прямой **c**, пересекающей прямые **a** и **b** под прямым углом.



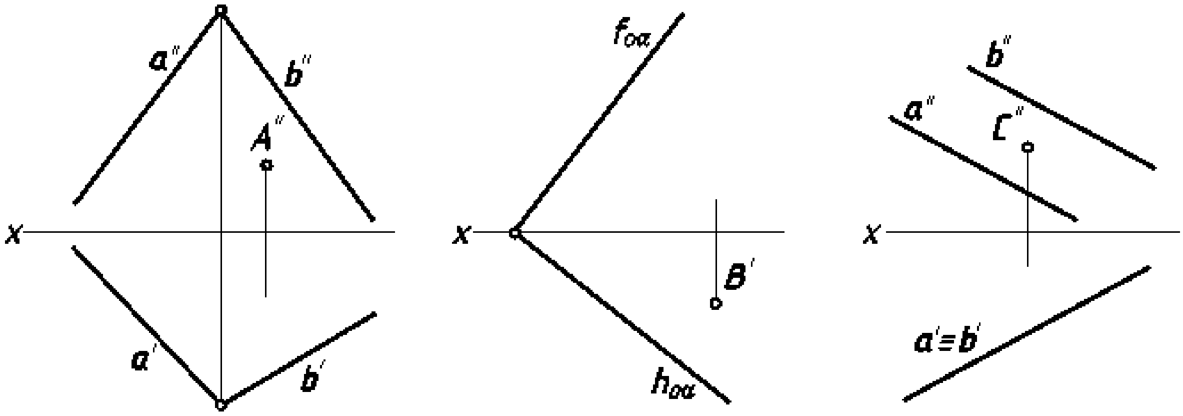
22. Построить проекции отрезка **BD**,перпендикулярного отрезку **AC**, если точка пересечения этих отрезков делит их пополам, точка **B** принадлежит фронтальной плоскости проекций, а точка **D** равноудалена от плоскостей проекций π_1 и π_2.



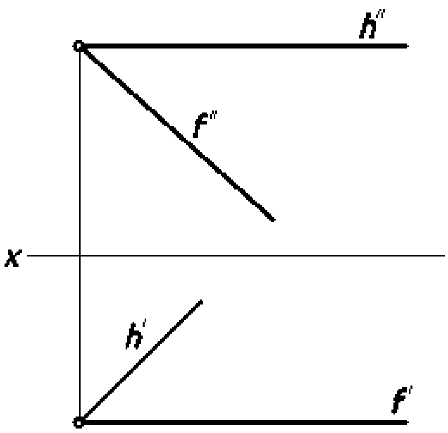
23. Определить положение заданных плоскостей относительно плоскостей проекций. Построить проекции треугольников **ABC**, расположенных в этих плоскостях.



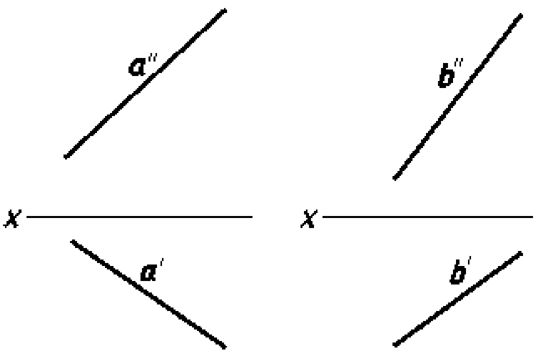
24. Определить положение заданных плоскостей относительно плоскостей проекций. Построить проекции горизонталей и фронталей этих плоскостей, проходящих через точки **A**, **B**, и **C**, принадлежащие этим плоскостям.



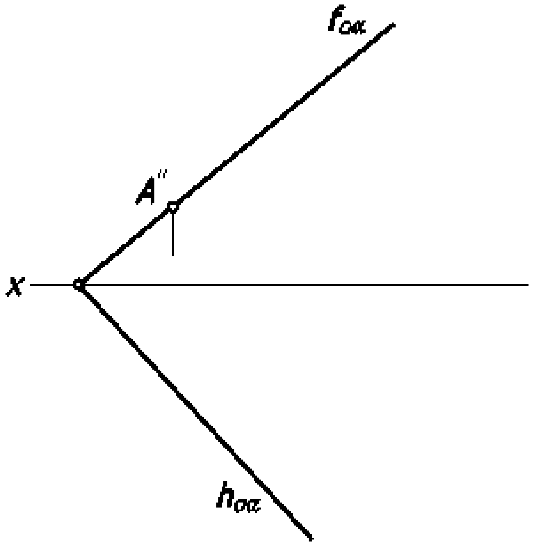
25. Построить следы заданной плоскости.



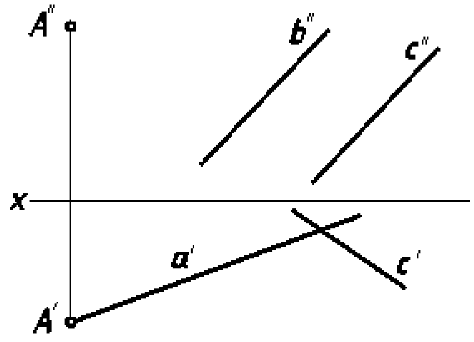
26. Заключить прямую **a** в горизонтально проецирующую плоскость, а прямую **b** во фронтально-проецирующую плоскость. Плоскости задать следами.



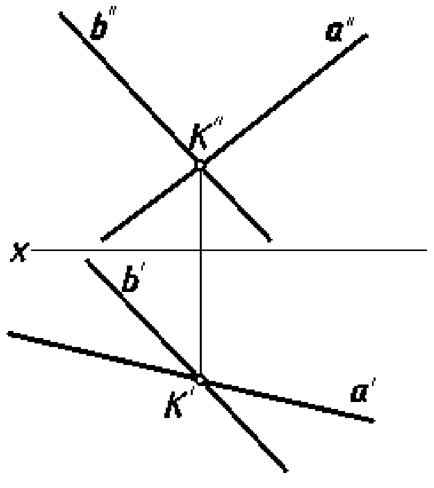
27. Построить проекции равнобедренного треугольника **ABC**, лежащего в плоскости α. Боковые стороны **AB**=**BC**=30 мм, сторона **AB**$\parallel \pi_1$, сторона **BC**$\parallel \pi_2$.



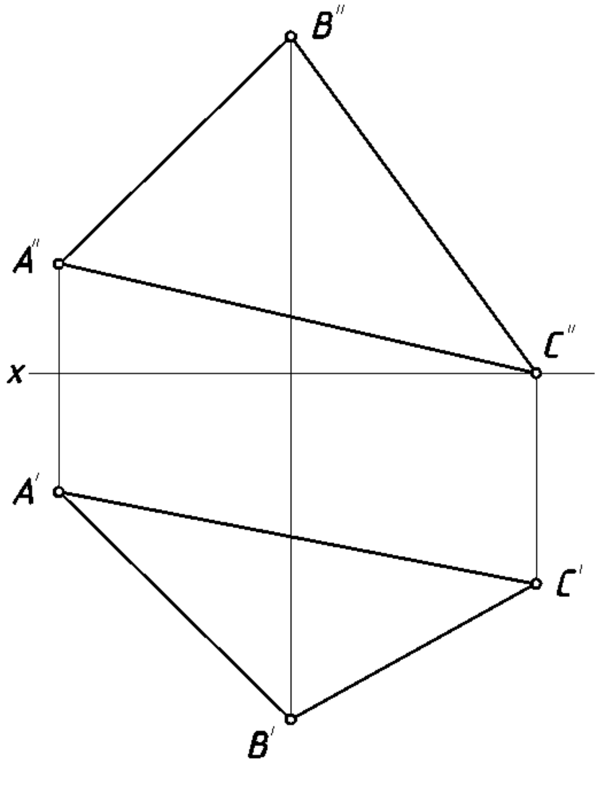
28. Построить недостающие проекции прямых **a** и **b** при условии, что прямые **a**, **b**, **c** и точка **A** лежат в одной плоскости.



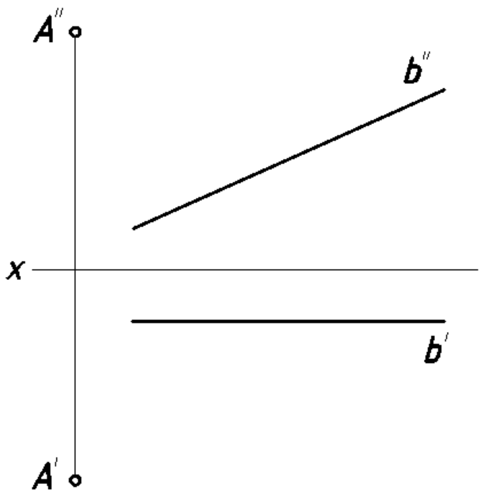
29. Через точку **K** провести горизонталь и фронталь заданной плоскости.



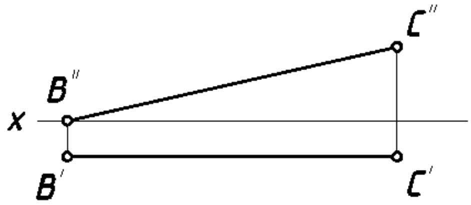
30. Определить углы наклона плоскости треугольника **ABC** к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций.



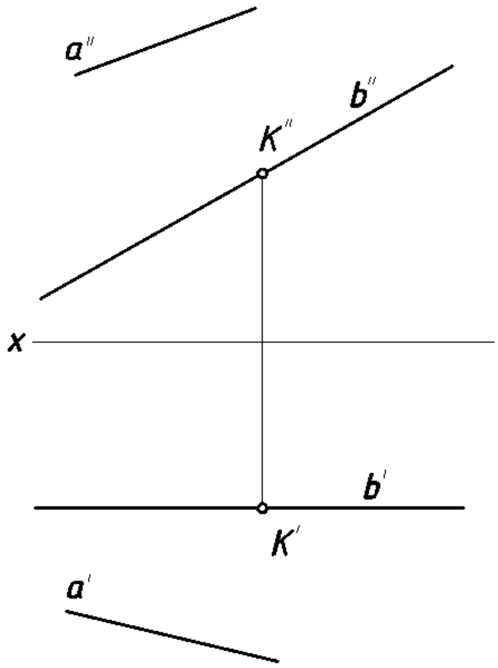
31 Построить проекции прямоугольного треугольника **ABC**, у которого сторона **BC** лежит на прямой **b**, угол **B** равен 90^{O}, а гипотенуза **AC** равна 50 мм.



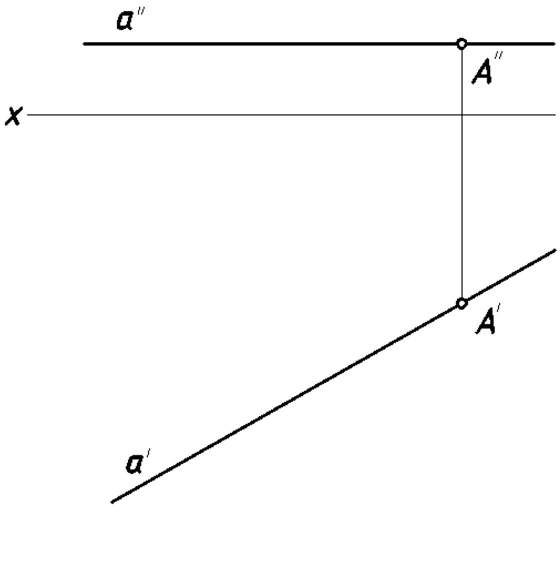
32. Построить проекции равностороннего треугольника **ABC**, плоскость которого наклонена к фронтальной плоскости проекций под углом 45^{O}.



33. Построить проекции квадрата **ABCD** с вершиной **A** на прямой **a** и диагональю **BD** на прямой **b**. Диагонали квадрата пересекаются в точке **К**.

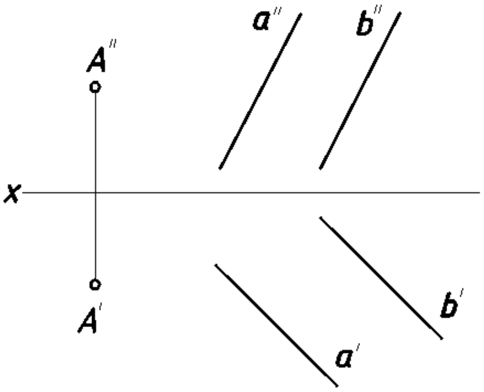


34. Построить проекции квадрата **ABCD** со стороной **AD** на прямой **a** и вершиной **B** на фронтальной плоскости проекций. Плоскость квадрата наклонена к горизонтальной плоскости проекций под углом 45^{O}.

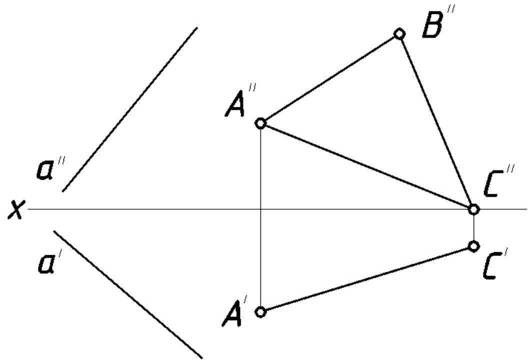


Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

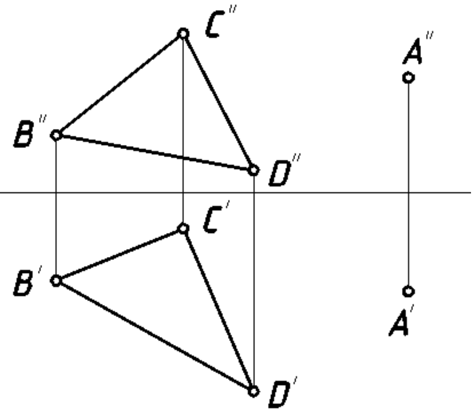
35. Построить проекции горизонтальной прямой, проходящей через точку **A** параллельно плоскости, заданной прямыми **a** и **b**.



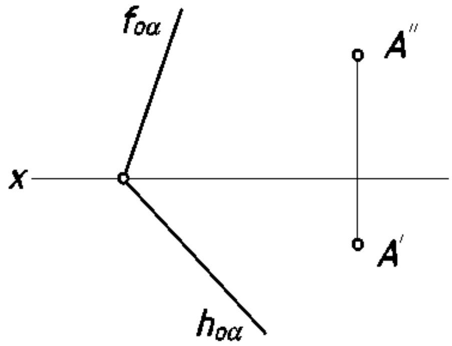
36. Достроить горизонтальную проекцию треугольника **ABC**, плоскость которого параллельна прямой **a**.



37. Построить проекции плоскости, проходящей через точку **A** параллельно плоскости, заданной на чертеже. Плоскости задать: а) горизонталью и фронталью; б) следами.

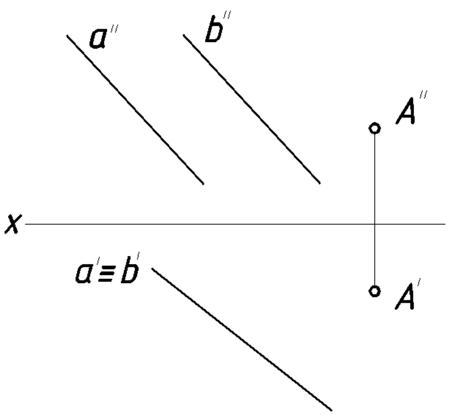


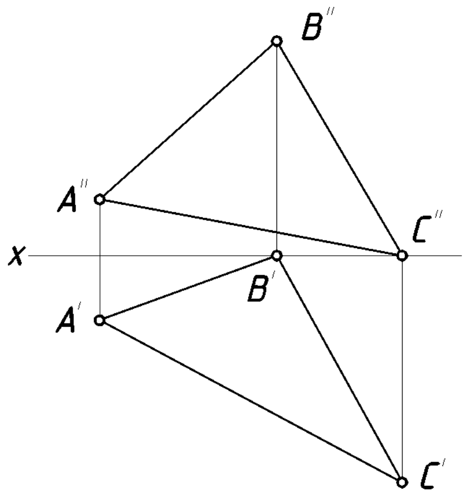
а)



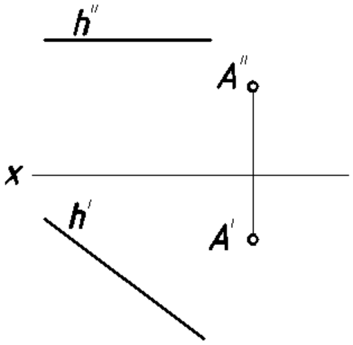
б)

38. Построить проекции прямой, проходящей через точку **A** перпендикулярно к заданной плоскости.

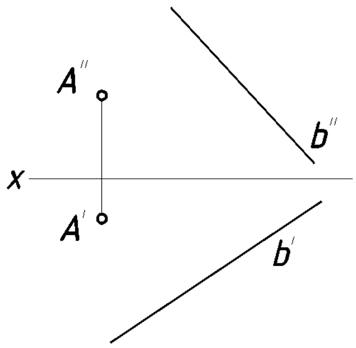




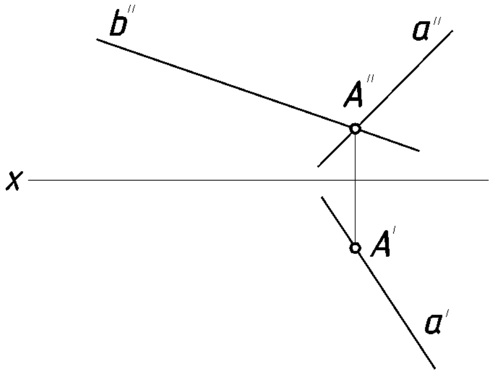
39а. Построить проекции плоскости, проходящей через точку **A** перпендикулярно к прямой **h**.



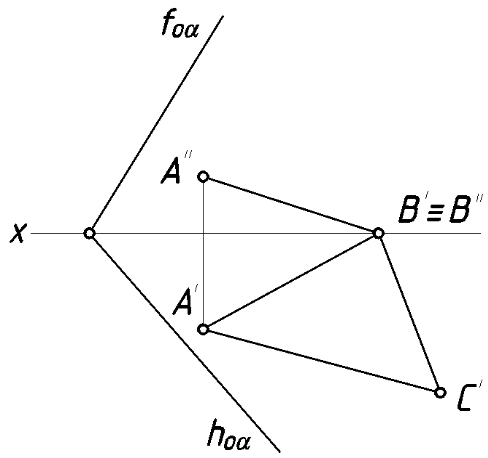
39б. Построить проекции плоскости, проходящей через точку **A** перпендикулярно к прямой **b**.



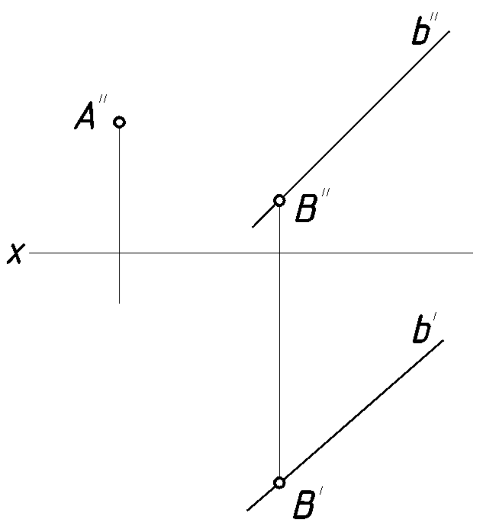
40. Построить горизонтальную проекцию прямой **b**, пересекающей прямую **a** в точке **A**, если прямые **a** и **b** взаимно перпендикулярны.



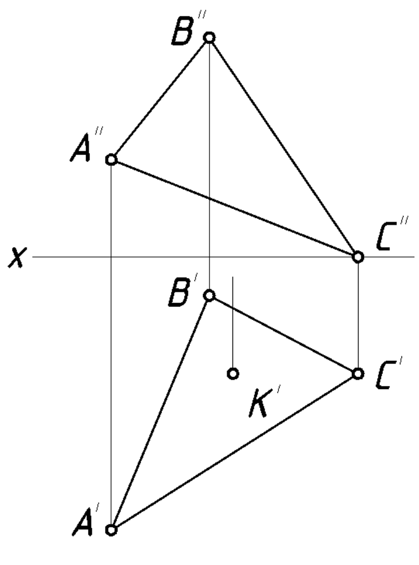
41.Достроить фронтальную проекцию треугольника **ABC**, плоскость которого перпендикулярна заданной плоскости **α**.



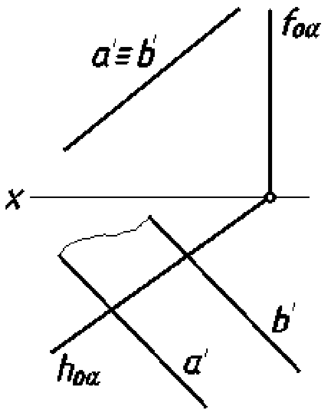
42. Построить проекции равнобедренного прямоугольного треугольника **ABC** с прямым углом при вершине **B** и катетом **BC** на прямой **b**.

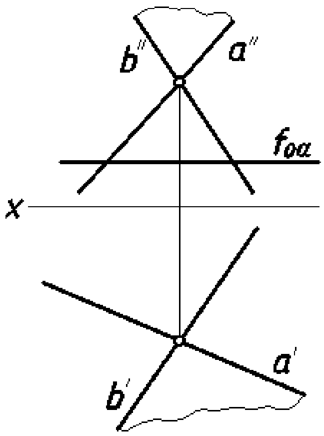


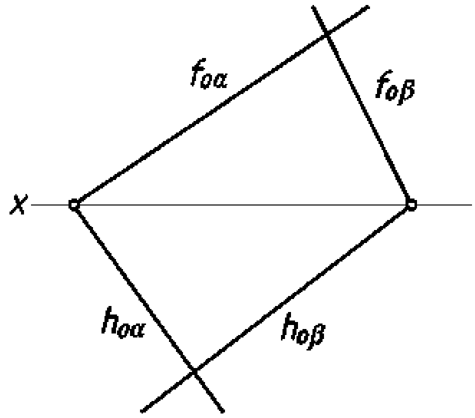
43. Построить проекции пирамиды **SABC** высота которой 35 мм. Точка **К** — основание высоты пирамиды.

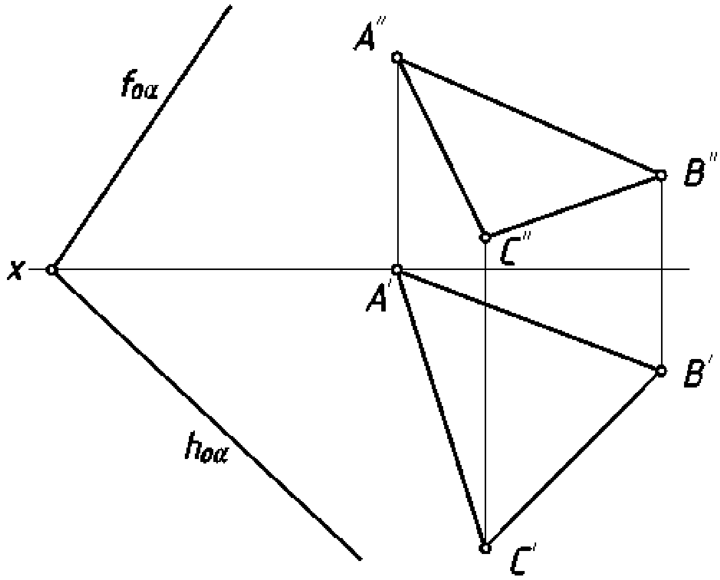


44. Построить проекции линий пересечения заданных плоскостей.

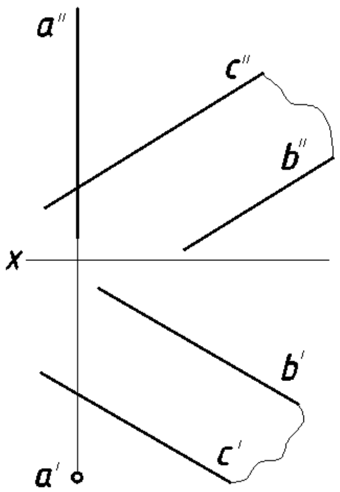


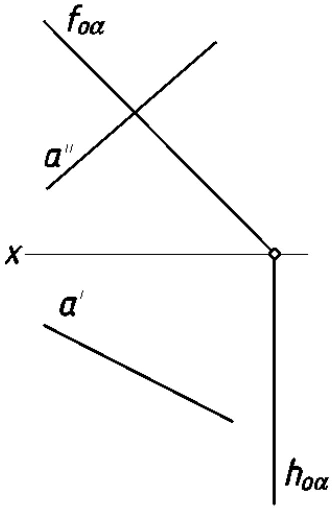


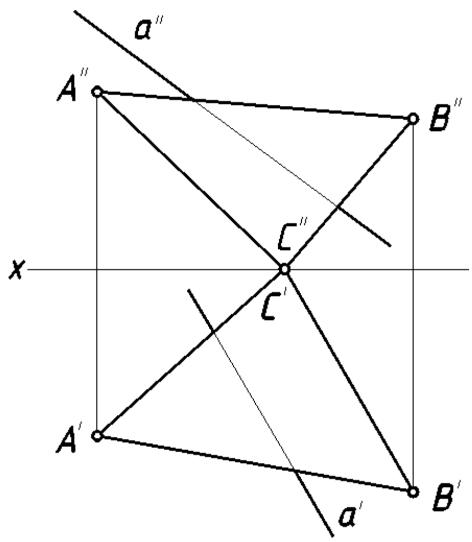




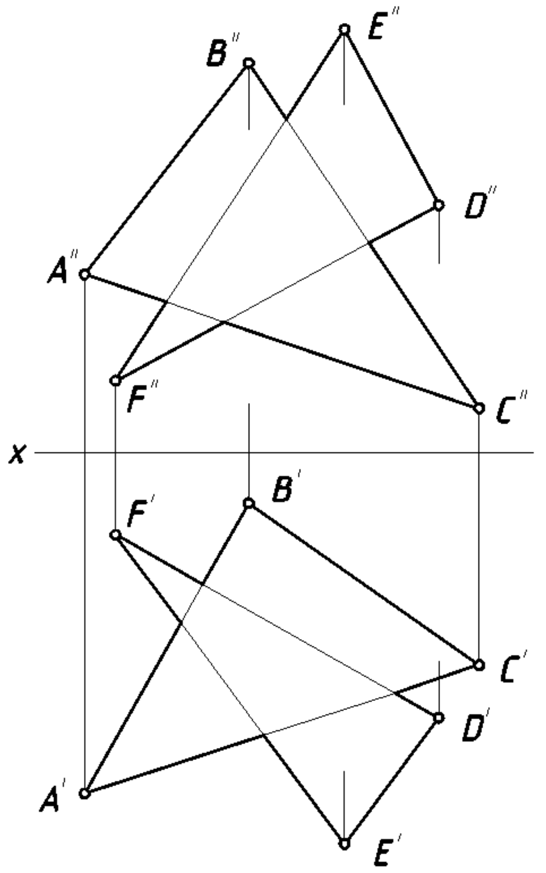
45. Построить проекции точек пересечения прямой **a** с заданными плоскостями. Определить видимость прямой относительно плоскостей.



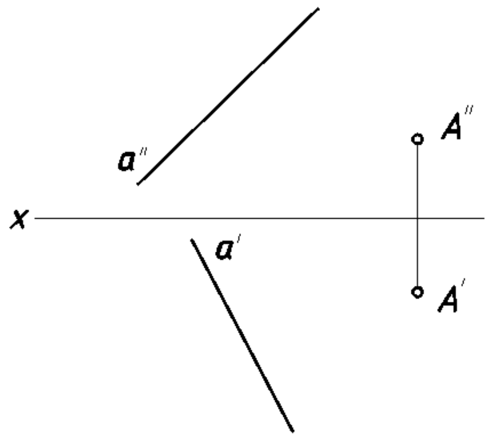




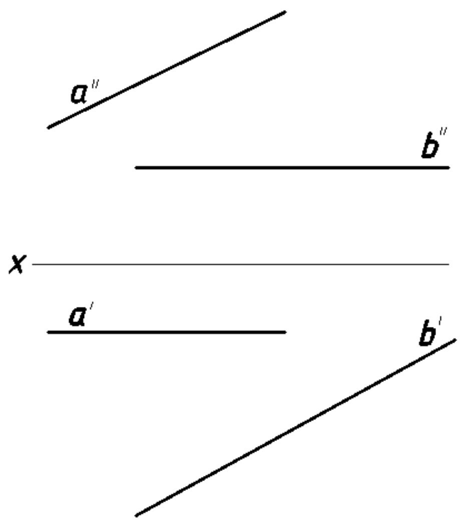
46. Построить проекции линии пересечения двух треугольников и определить их взаимную видимость.



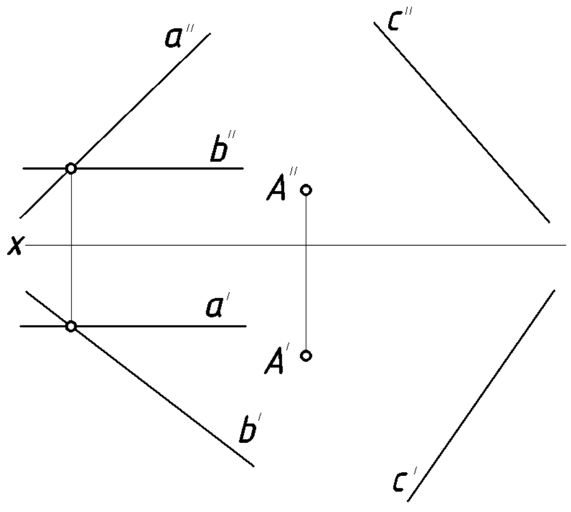
47. Определить расстояние от точки **A** до прямой **a**.



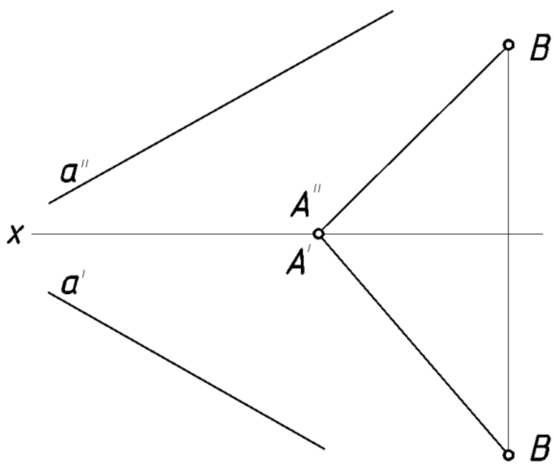
48. Определить расстояние между прямыми **a** и **b**.



49. Построить проекции прямой, проходящей через точку **A** параллельно плоскости, заданной прямыми **a** и **b**, и пересекающей прямую **c**.



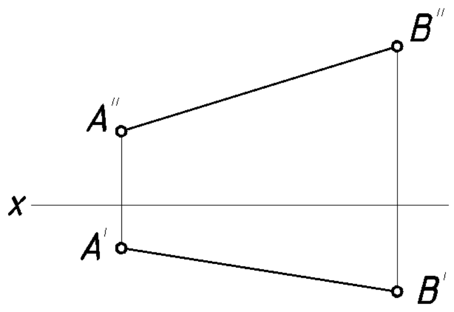
50. Построить проекции точки, принадлежащей прямой **a** и равноудаленной от концов отрезка **AB**.



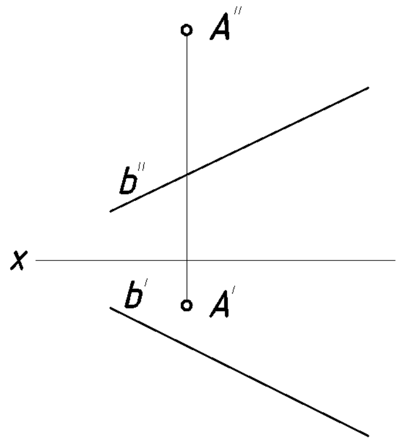
Способы преобразования чертежа

1. Способ замены плоскостей проекций

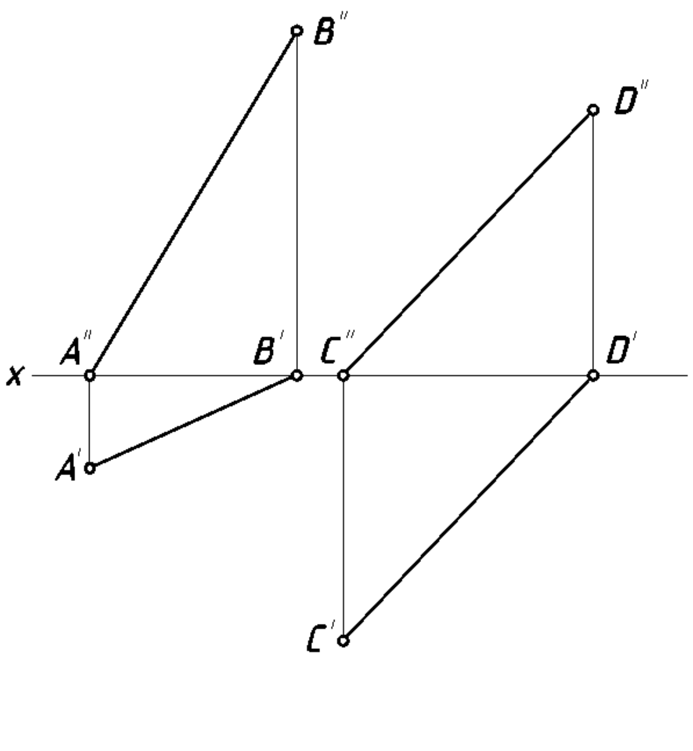
51. Заменой плоскостей проекций преобразовать чертеж отрезка **AB** так, чтобы в новой системе плоскостей проекций отрезок занял проецирующее положение.



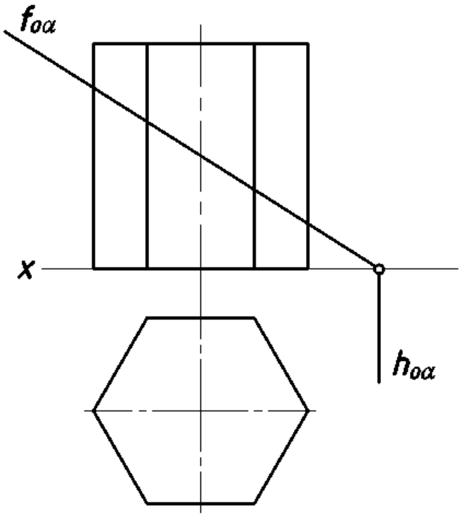
52. Построить проекции перпендикуляра, опущенного из точки **A** на прямую **b**, применив при решении способ замены плоскостей проекций.



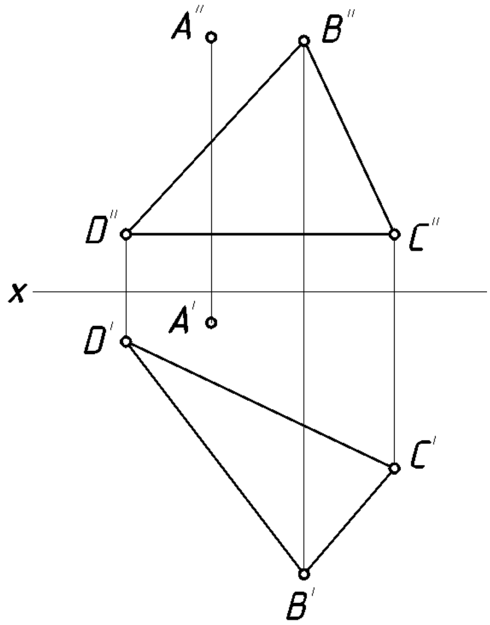
53. Определить расстояние между отрезками **AB** и **CD**, применив способ замены плоскостей проекций. Построить проекции отрезка, определяющего это расстояние



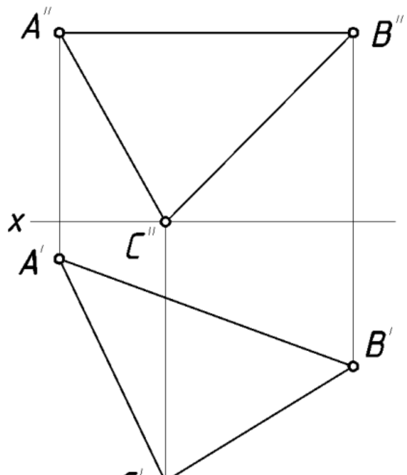
54. Построить натуральный вид сечения призмы плоскостью α , используя способ замены плоскостей проекций.



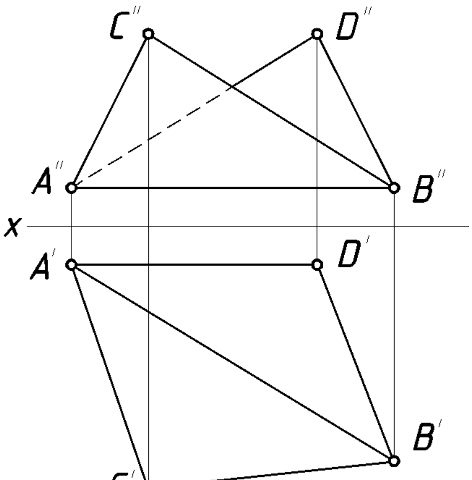
55. Определить расстояние от точки **A** до плоскости треугольника **BCD**, применив способ замены плоскостей проекций. Построить проекции отрезка, определяющего это расстояние.



56. Построить проекции центра окружности вписанной в треугольник **ABC**, используя способ замены плоскостей проекций.

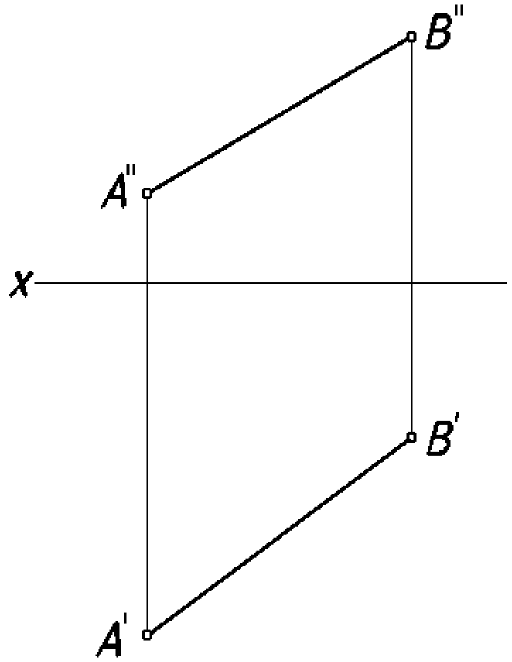


57. Определить величину двугранного угла между плоскостями треугольников **ABC** и **ABD**, применив способ замены плоскостей проекций.

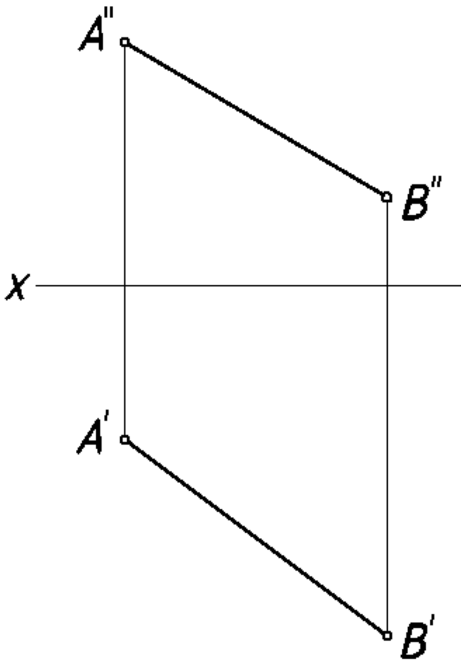


2. Плоскопараллельное перемещение

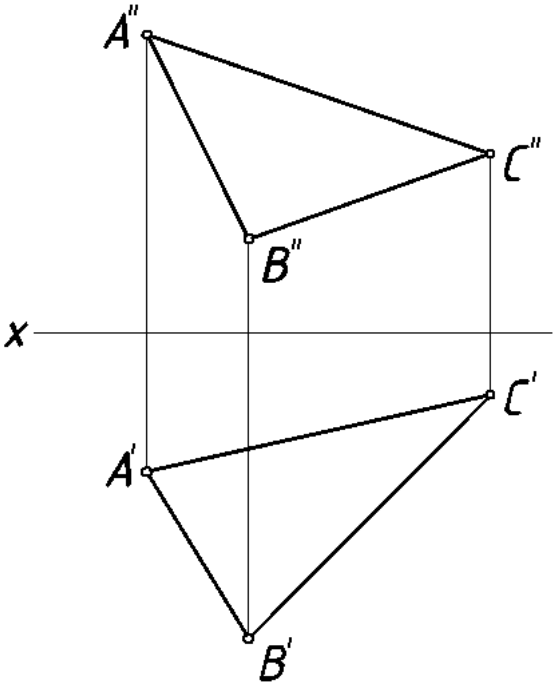
58. Определить длину отрезка **AB** и угол наклона его к фронтальной плоскости проекций, применив плоскопараллельное перемещение.



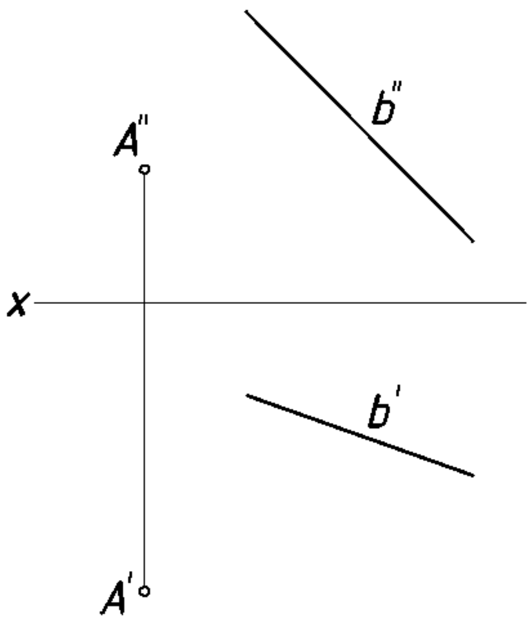
59. Преобразовать чертеж отрезка прямой общего положения в чертеж фронтально проецирующего отрезка, применив плоскопараллельное перемещение.



60. Определить натуральную величину треугольника **ABC**, применив плоскопараллельное перемещение.

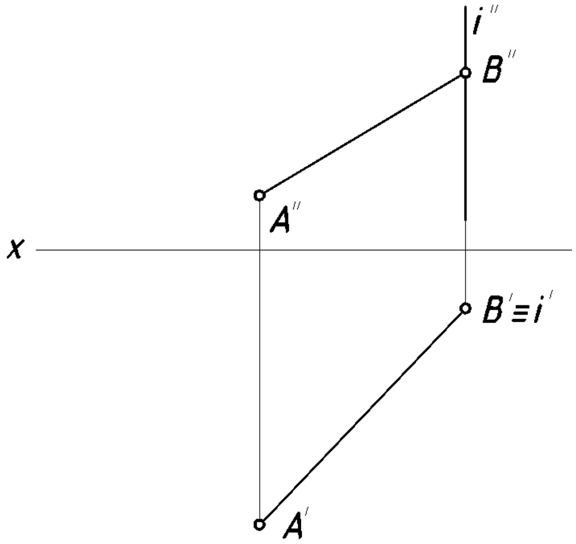


61. Определить угол наклона плоскости, заданной точкой **A** и прямой **b** к горизонтальной плоскости проекций, применив плоскопараллельное перемещение.

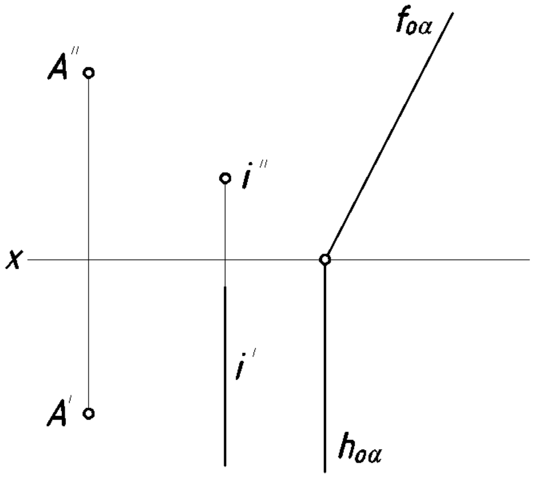


3. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

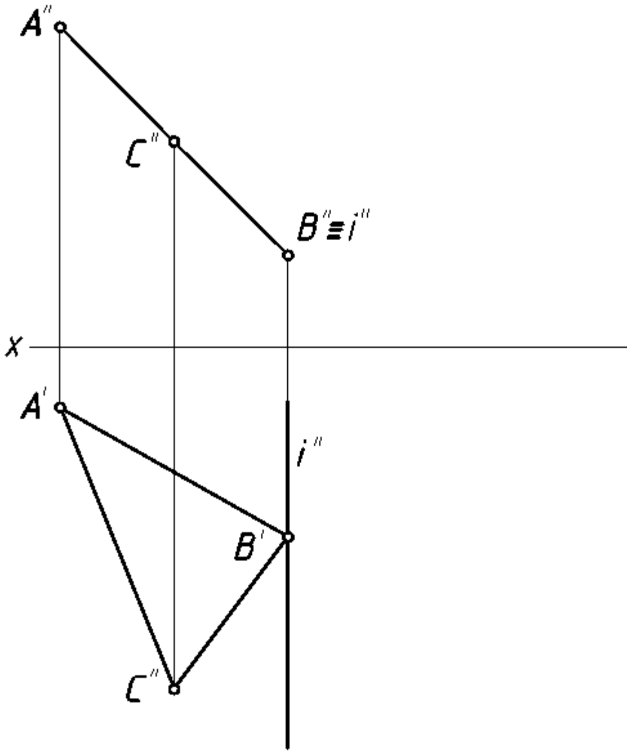
62. Определить натуральную величину отрезка **AB** и угол наклона его к горизонтальной плоскости проекций, поворотом отрезка вокруг прямой **i**.



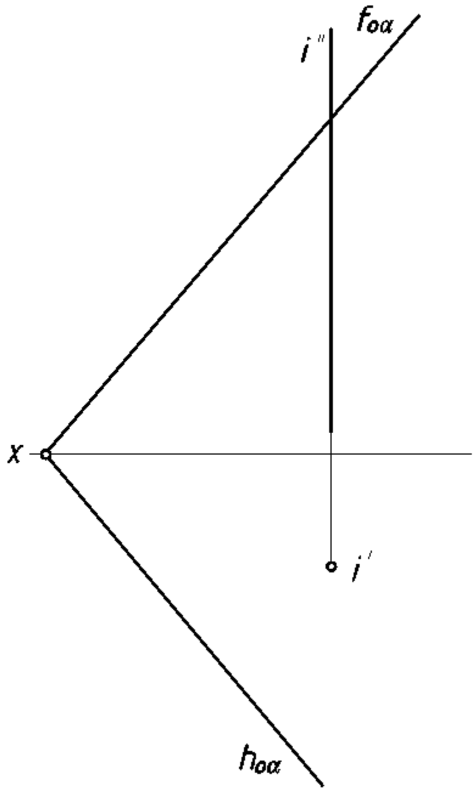
63. Повернуть точку **A** вокруг прямой **i**, чтобы она оказалась в плоскости **α**.



64. Определить истинный вид треугольника **ABC**, применив вращение вокруг прямой **i**.

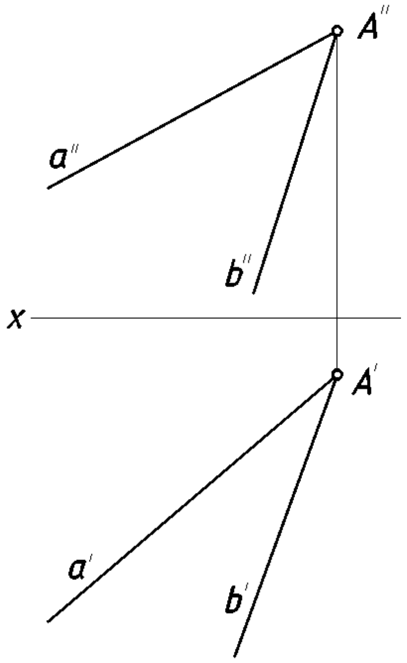


65. Определить угол наклона плоскости **α** к горизонтальной плоскости проекций, применив вращение вокруг прямой **i**.

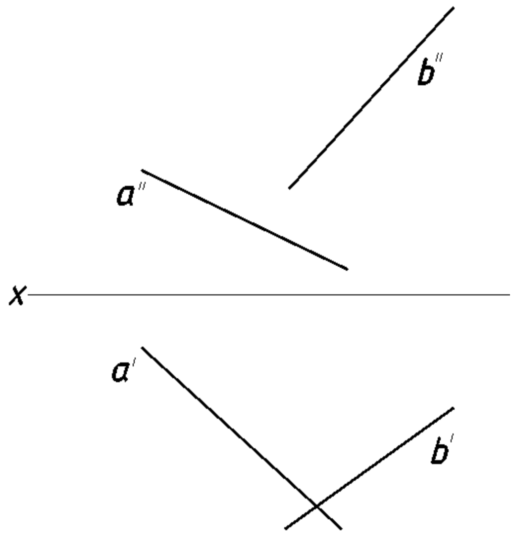


4. Способ вращения вокруг прямой уровня

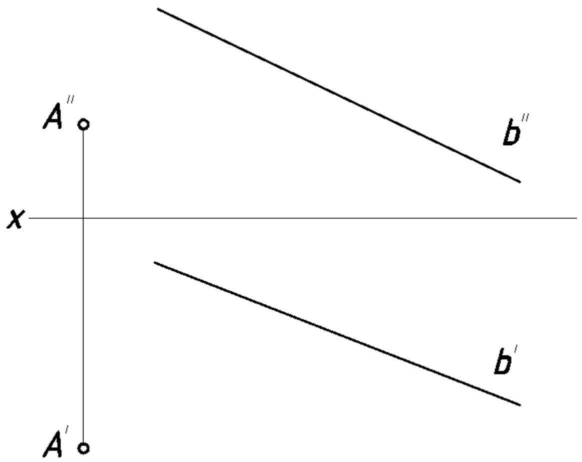
66. Построить проекции биссектрисы угла **A**, применив вращение вокруг вокруг горизонтали.



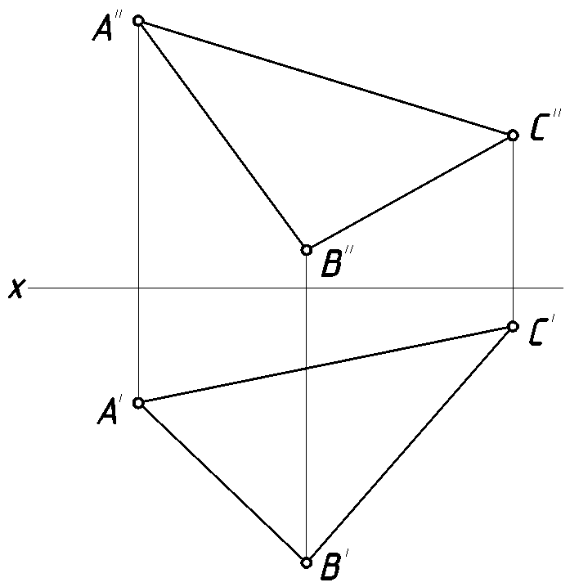
67. Определить величину угла между прямыми **a** и **b**, применив вращение вокруг фронтали.



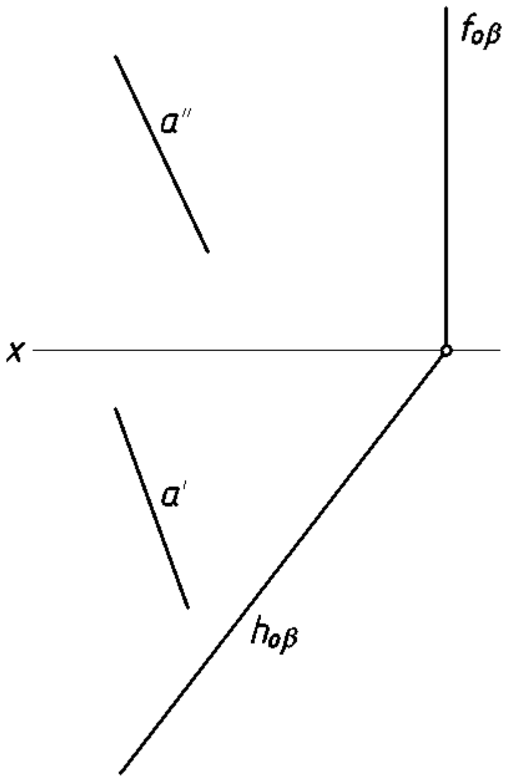
68. Определить расстояние от точки **A** до прямой **b**, применив вращение вокруг горизонтали.



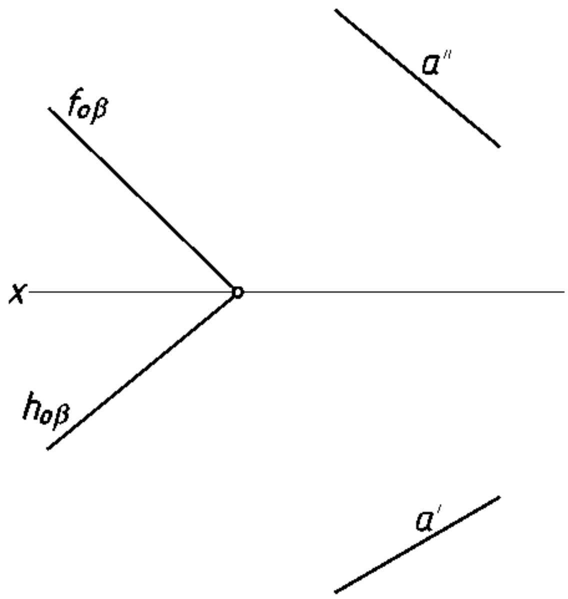
69. Построить проекции центра окружности, описанной вокруг треугольника **ABC**, применив вращение вокруг фронтали, проходящей через вершину **C**.



70. Определить величину угла между прямой **а** и плоскостью β, применив вращение вокруг прямой уровня.

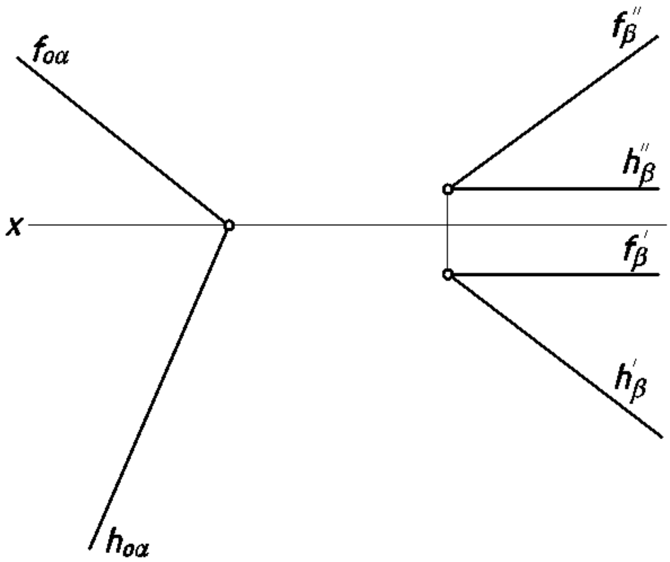


а)



б)

71. Определить величину угла между плоскостями α и β, применив вращение вокруг прямой уровня.



Точка и линия на поверхности

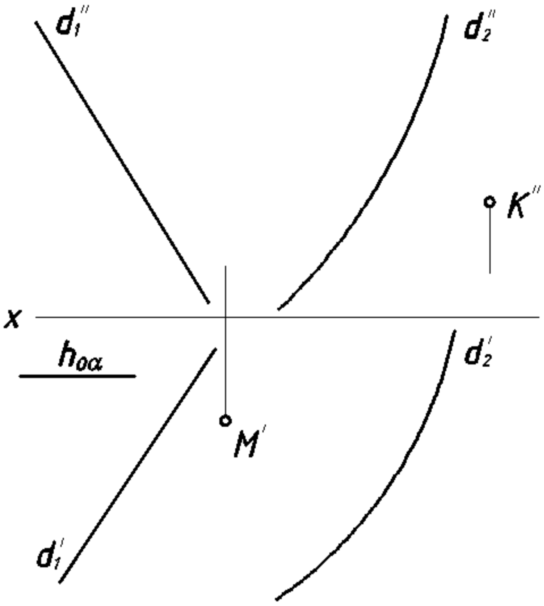
72. Построить недостающие проекции точек **M** и **K**, принадлежащих:

а) поверхности коноида, заданного направляющими $\mathbf{d_1}$ и $\mathbf{d_2}$ и плоскостью параллелизма $\boldsymbol{\alpha}$;

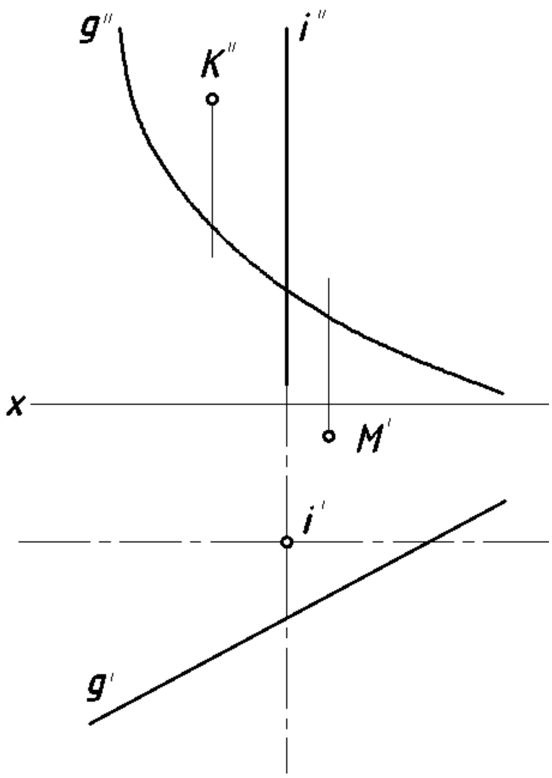
б) поверхности вращения, заданной осью **i** и образующей **g** ;

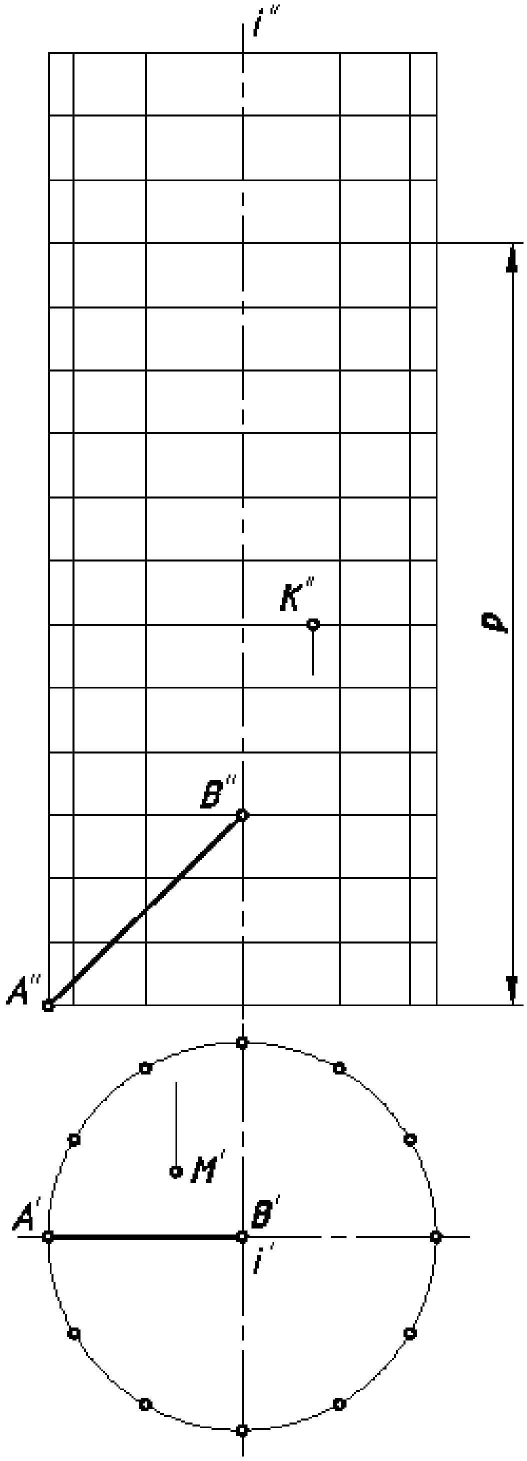
в) поверхности правого косого закрытого геликоида с осью **i**, образующей **AB** и шагом **p**.

Построить фронтальные очерки заданных поверхностей.



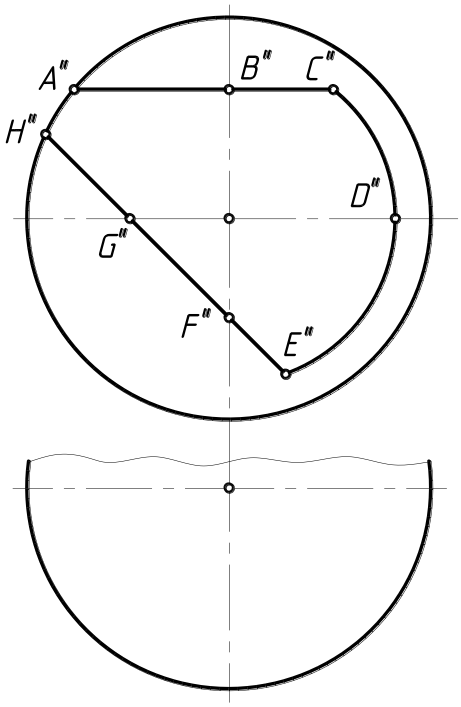
а)



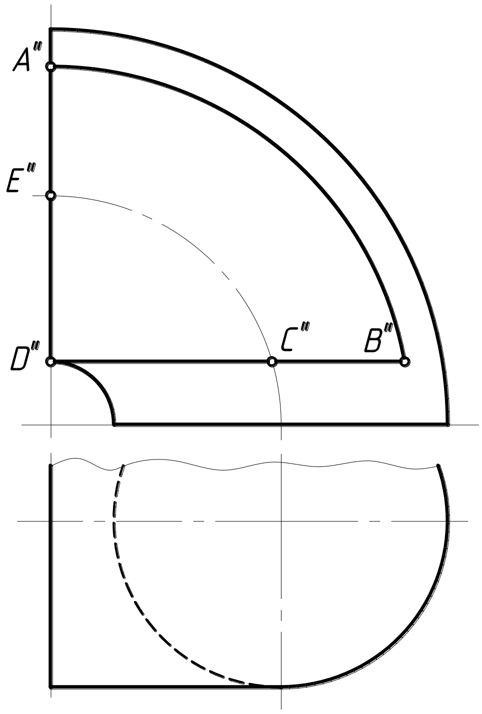


б) в)

73. Построить горизонтальные проекции точек и линий, проходящих через эти точки на поверхности сферы (а) и тора (б).

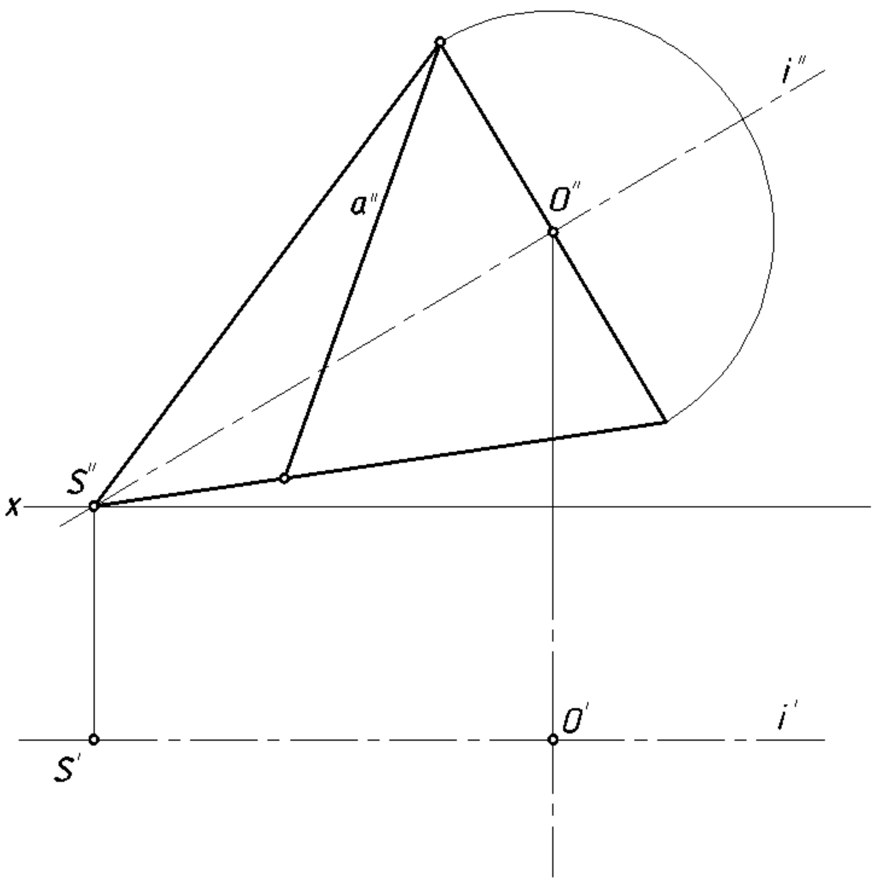


а)



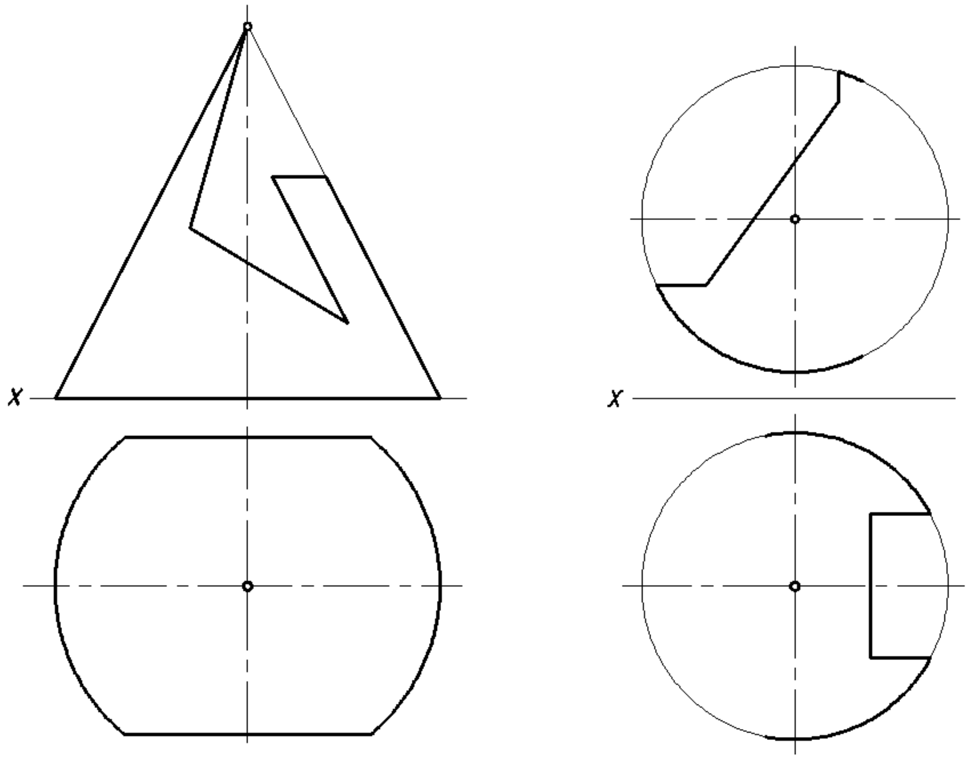
б)

74. Построить горизонтальные проекции конуса вращения и линии **a** принадлежащей его поверхности.



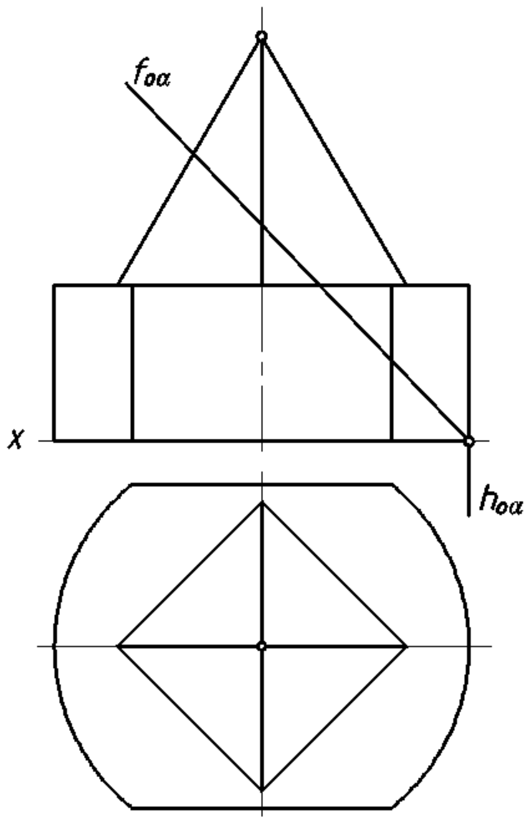
Пересечение поверхностей

75. Достроить проекции конуса (а) и шара (б), усеченных проецирующими плоскостями.



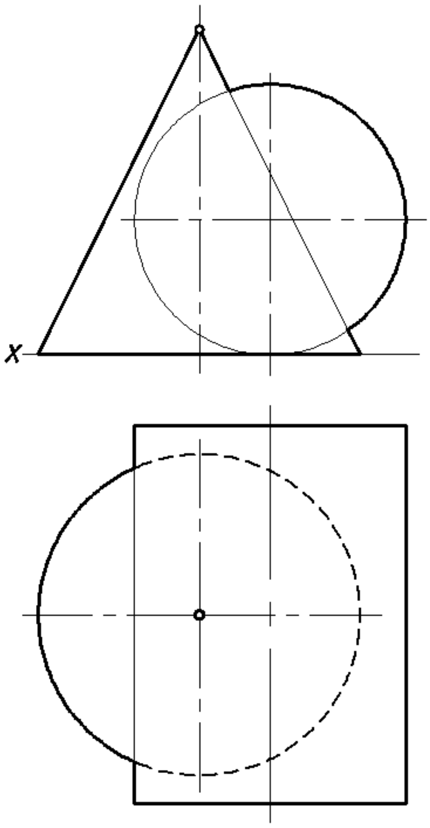
а) б)

76. Построить горизонтальную проекцию и натуральный вид сечения заданной геометрической фигуры плоскостью α .

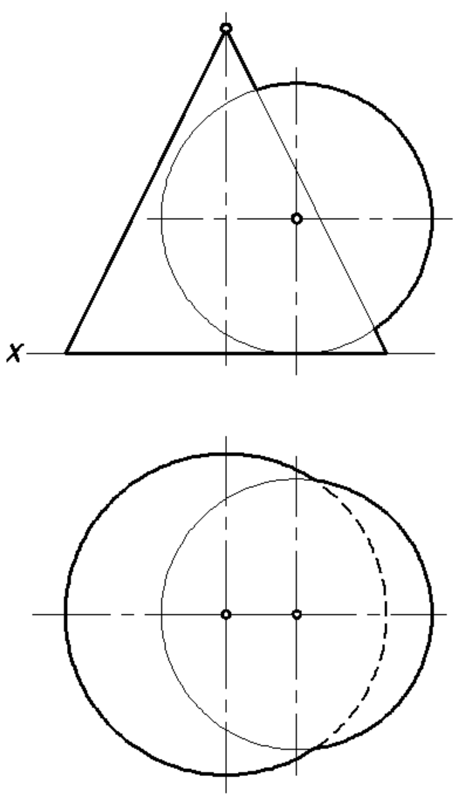


77. Построить проекции линий пересечения заданных поверхностей:

а) конической и цилиндрической; б) конической и сферической;

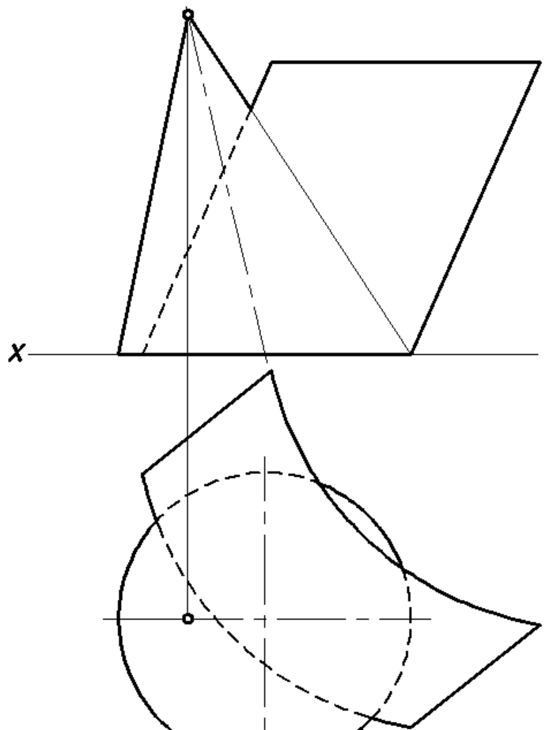


а)



б)

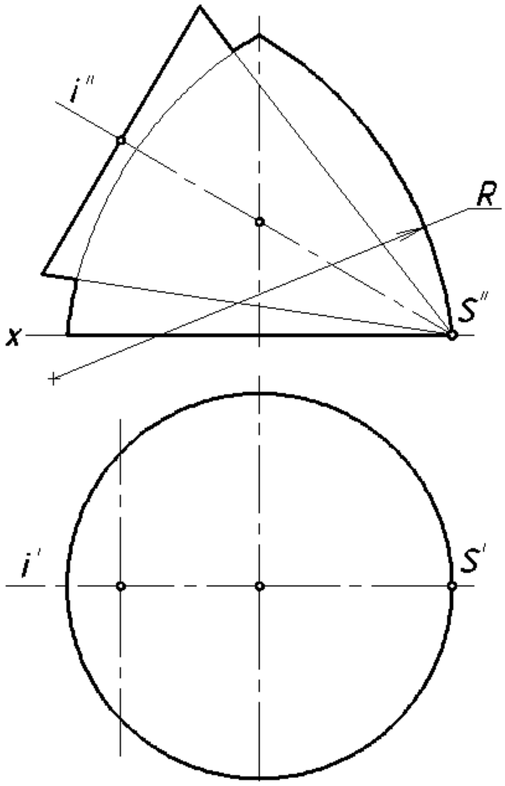
в) конической и цилиндрической.



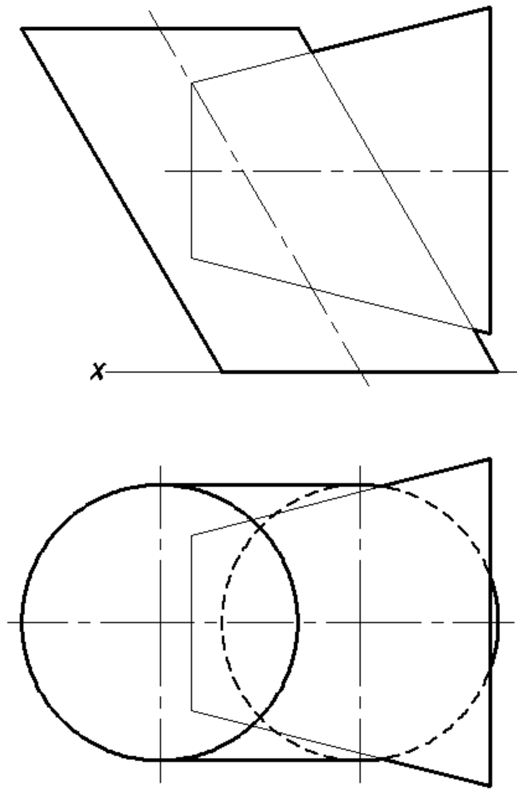
в)

78. Построить проекции линий пересечения заданных поверхностей:

а) конуса вращения и тора; б) эллиптического цилиндра и конуса вращения;

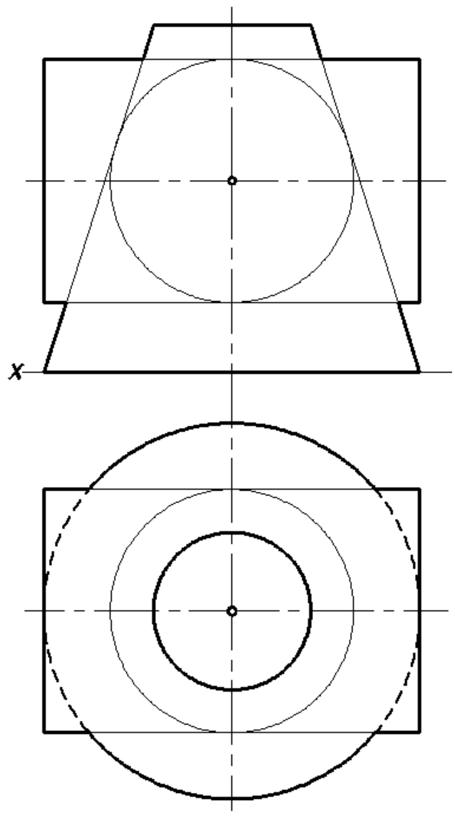


а)



б)

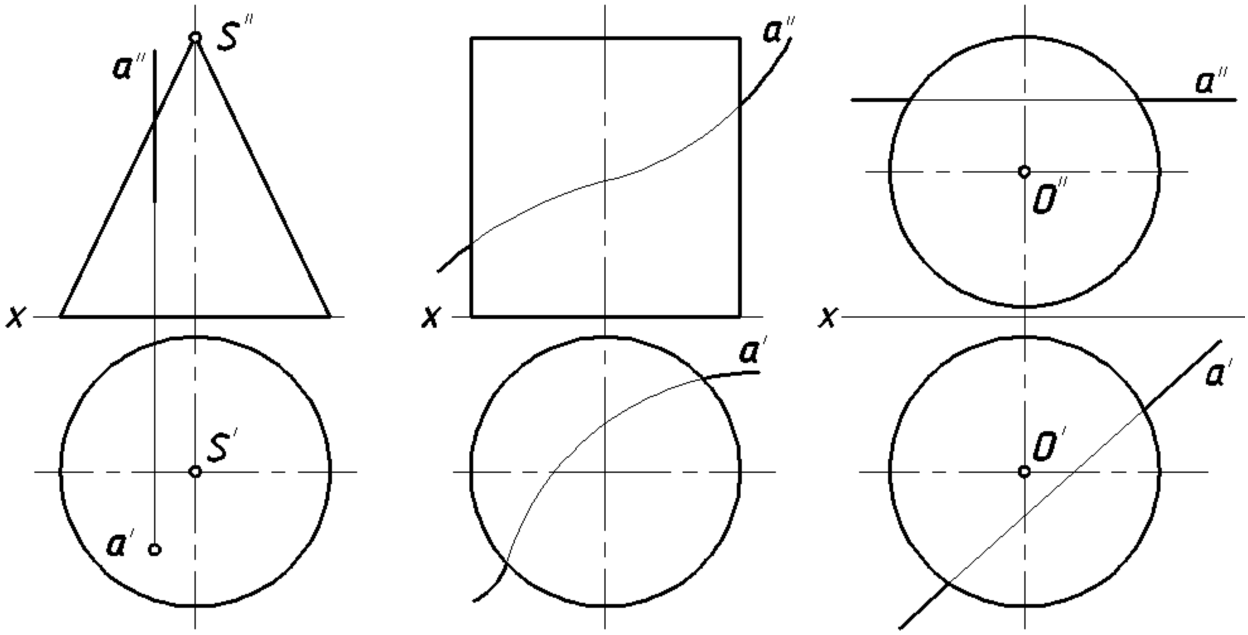
в) конуса вращения и цилиндра вращения



в)

Пересечение линии и поверхности

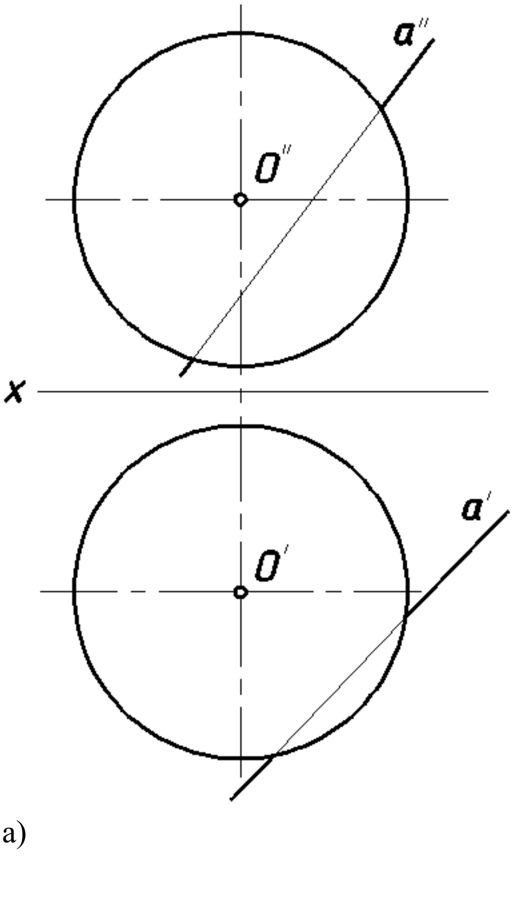
79. Построить проекции точек пересечения линии **а** с заданными поверхностями.



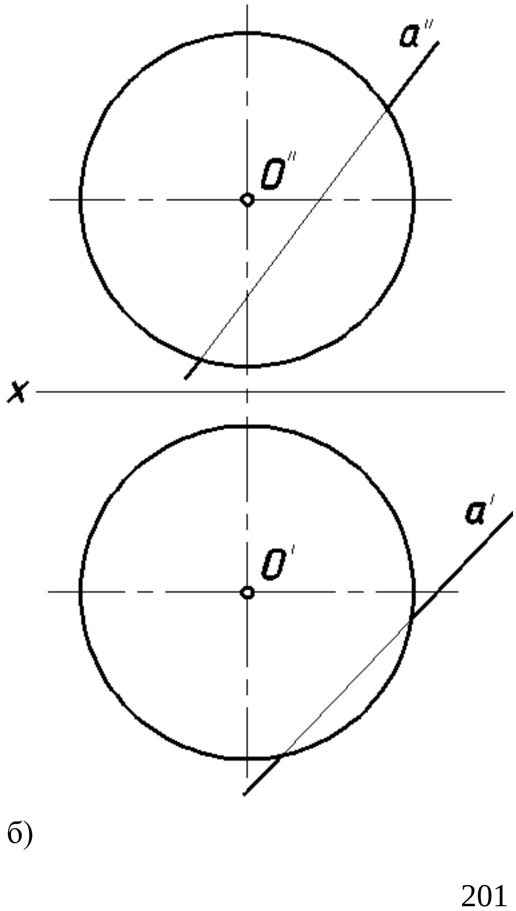
80. Построить проекции точек пересечения прямой **а** со сферой:

а) применив способ замены плоскостей проекций;

б) применив способ вращения вокруг фронтали.



а)

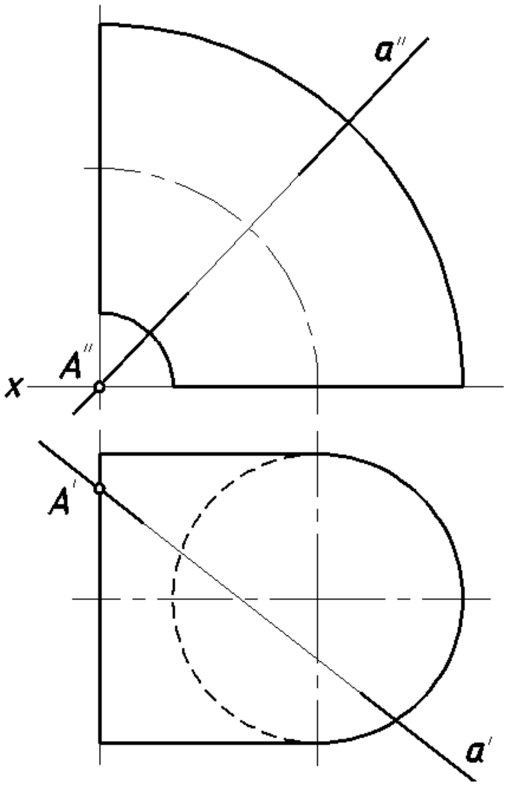


б)

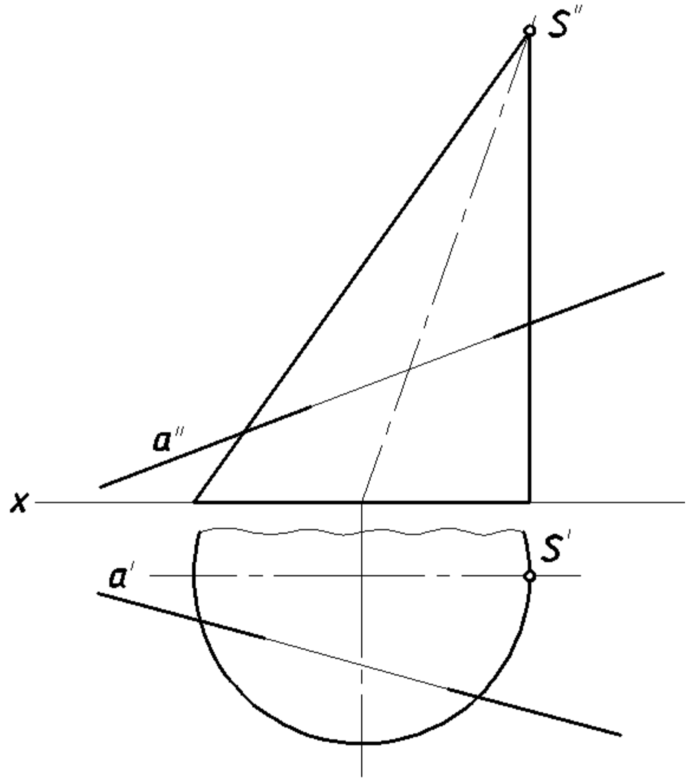
81. Построить проекции точек пересечения прямой **а** с заданными поверхностями:

а) с поверхностью тора, применив способ вращения вокруг проецирующей прямой;

б) с конической поверхностью (без построения лекальных кривых);

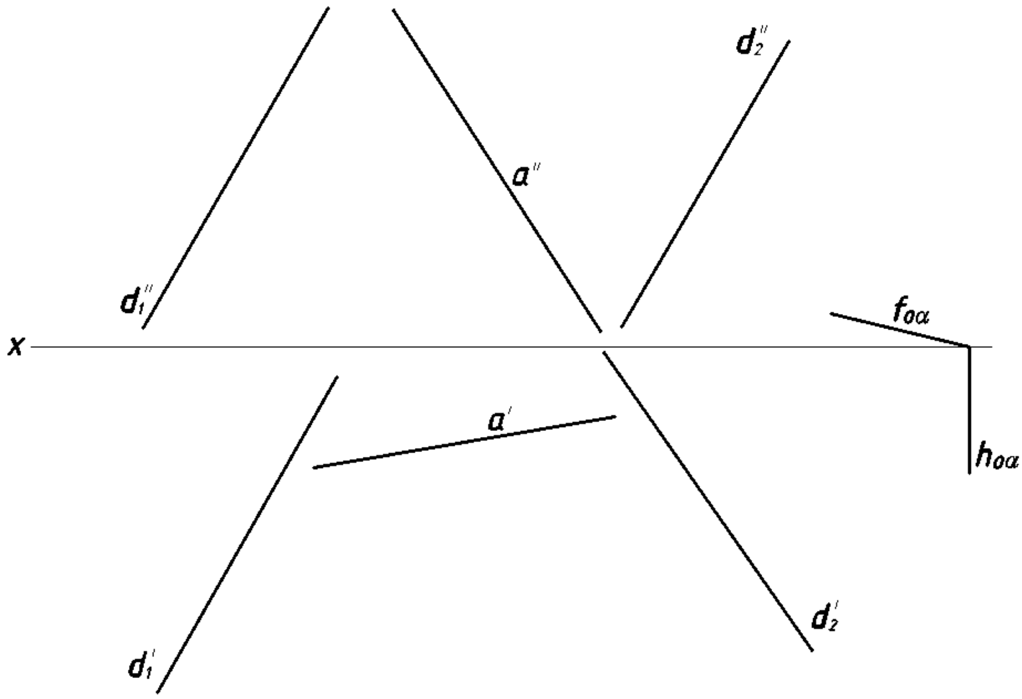


а)



б)

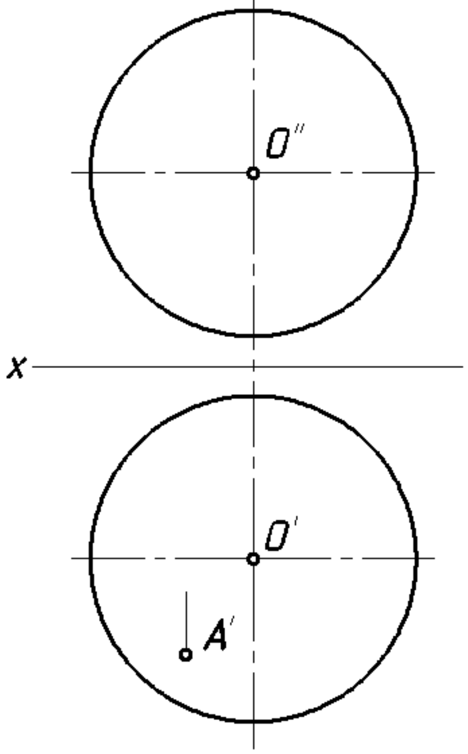
в) с поверхностью гиперболического параболоида (косой плоскостью), заданной направляющими **d_1** и **d_2** и плоскостью параллелизма α .



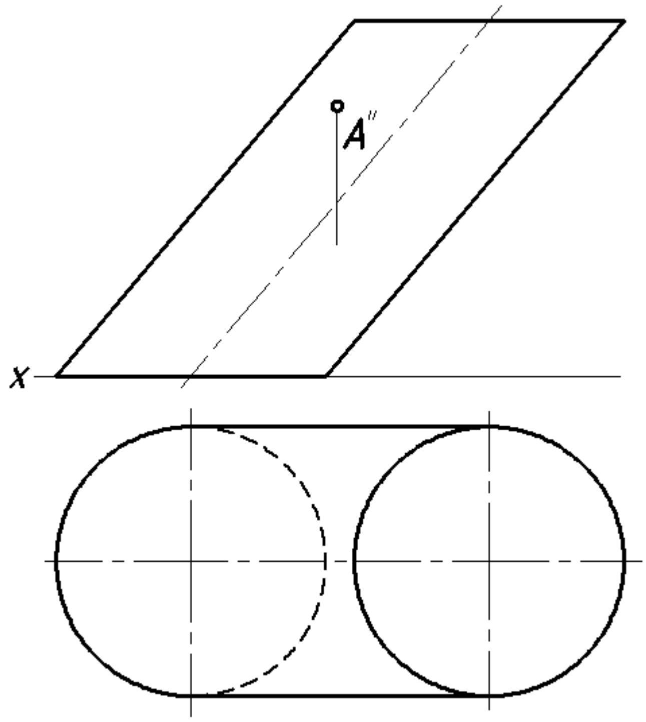
в)

Плоскость, касательная к поверхности. Нормаль к поверхности

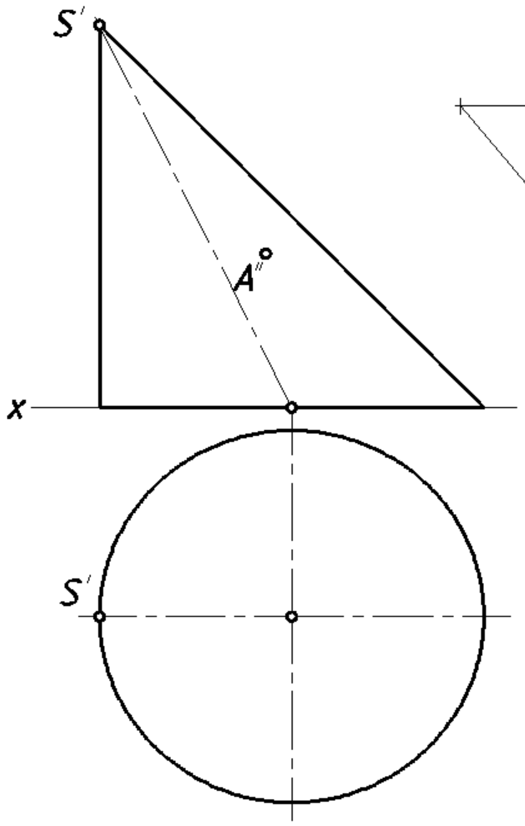
82. В точке **A**, принадлежащей заданной поверхности, построить проекции касательной плоскости и нормали к этой поверхности



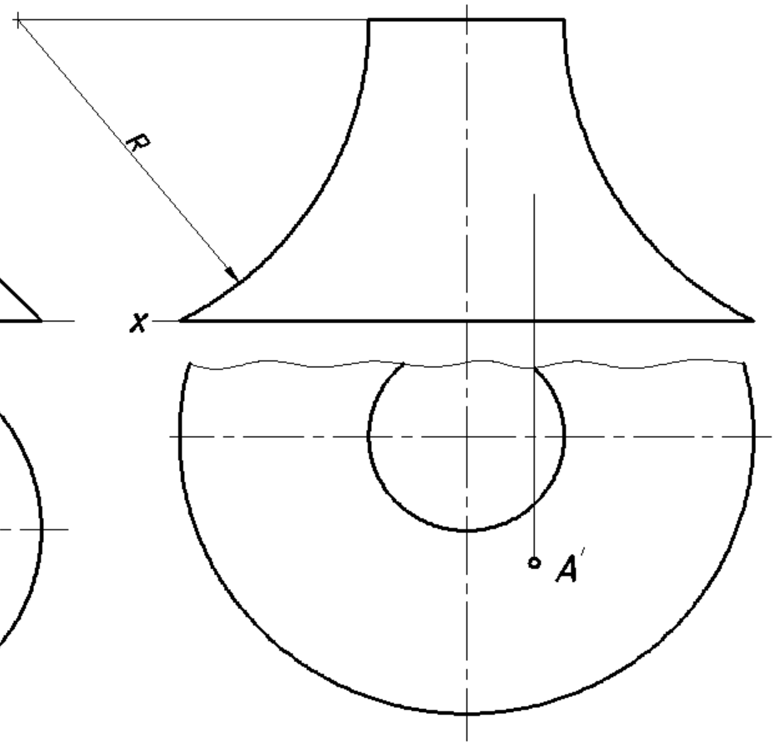
а)



б)



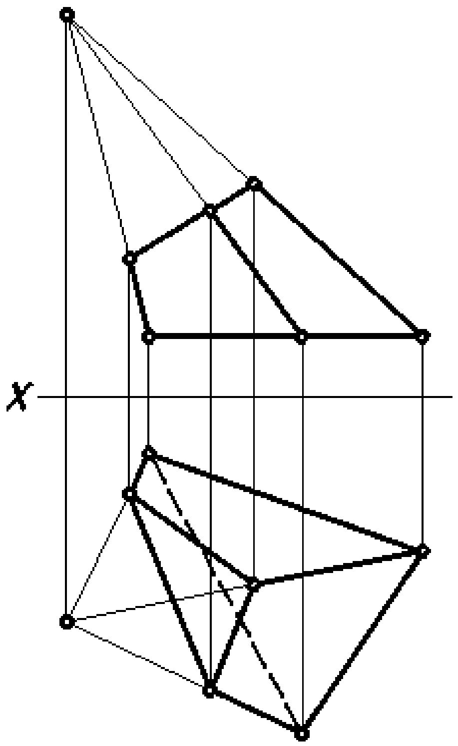
в)



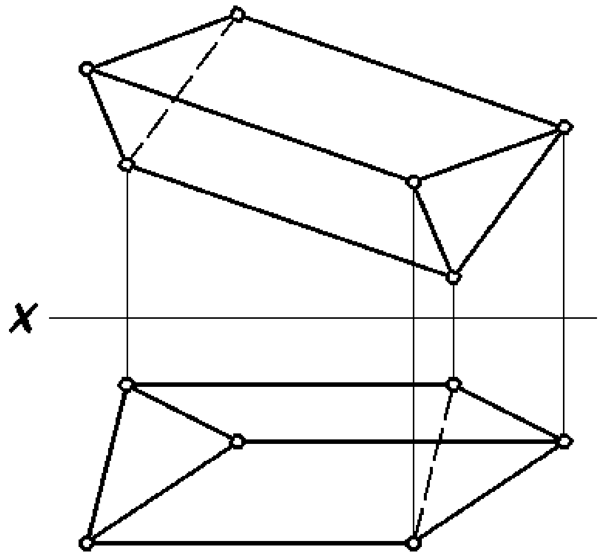
г)

Развертки

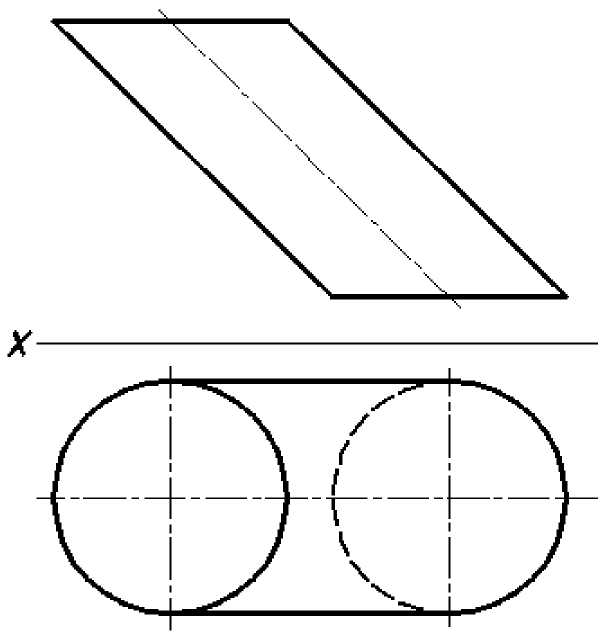
83. Построить полную развертку усеченной пирамиды методом триангуляции.



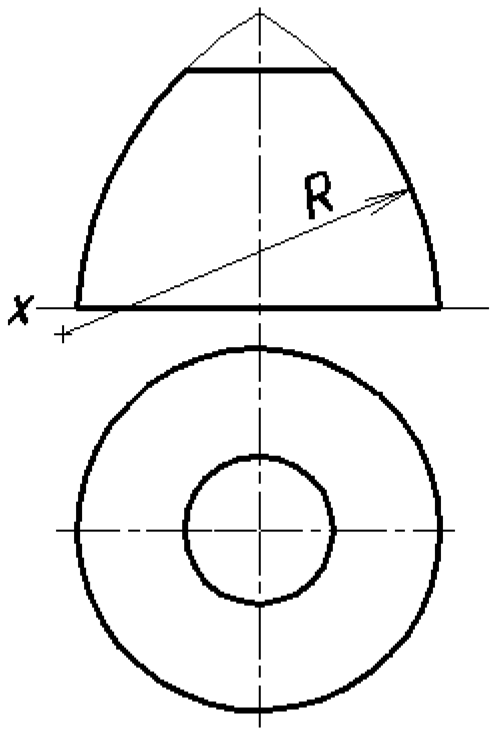
84. Построить развертку призмы методом нормального сечения.



85. Построить развертку цилиндрической поверхности методом раскатки.

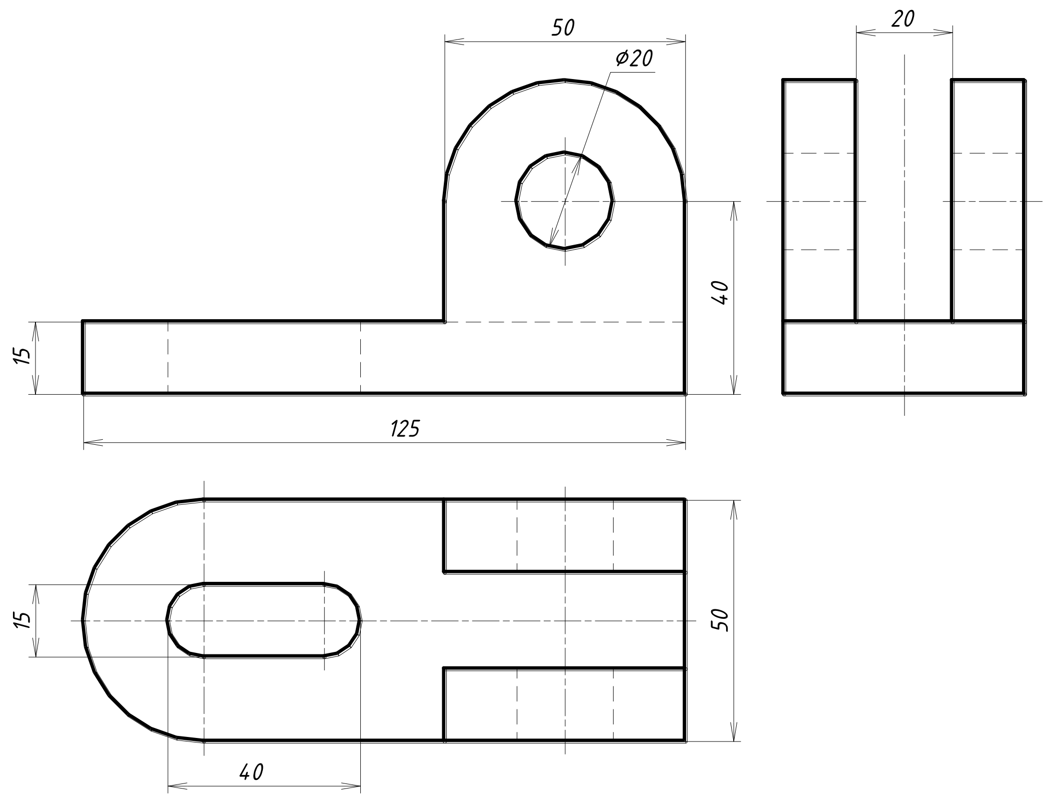


86. Построить условную развертку поверхности тора.



Аксонометрические проекции

87. Построить прямоугольные изометрическую и диметрическую проекции заданной геометрической фигуры.



Рекомендуемая учебная литература

1. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. - М.: КноРус, 2012г.
2. Бубенников А.В., Громов М.Я. Сборник задач по начертательной геометрии. М. Высшая школа 1963г.
3. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. Задачи для упражнений. - М.: Высшая школа, 1981г.
4. Гордон В.О., Иванов Ю.Б., Солнцева Т.Е.. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. - М.: Изд-во «Наука», 1977г.
5. Королев Ю.И., Устюжанина С.Ю. Сборник задач по начертательной геометрии. - СПб, «Питер», 2008г.
6. Локтев О.В., Числов П.А. Задачник по начертательной геометрии. - М.,: Высшая школа, 1984 г.
7. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1986.
8. Шарикян Ю.Э., Одинцова, Кашу А.А. Методические указания по выполнению домашних заданий по начертательной геометрии. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2012г.